ANTIRREALISMO Y MATEMÁTICAS: UNA CRÍTICA AL PROYECTO DE DUMMETT

Romina Padró
Universidad de Buenos Aires

En varios de sus artículos, Michael Dummett[1] insiste en que la disputa entre realistas y antirrealistas en el contexto de las matemáticas tiene que ser tratada en términos de una teoría del significado. Desde esta perspectiva, el debate debe centrarse en la cuestión de cuál es la teoría del significado que resulta más adecuada para explicar la comprensión de los enunciados matemáticos. Según él, no es posible resolver dicha disputa partiendo de una decisión acerca del carácter metafísico de la realidad matemática debido a la ausencia de bases para decidir esta cuestión ontológica. La razón que proporciona en tal sentido es que dicha elección no puede ser justificada y que, en consecuencia, ésta será producto de una decisión arbitraria. Por lo tanto, considera que es necesario decidir primero la teoría del significado, ya que una vez resuelto esto se nos impondrá una imagen del carácter metafísico de la realidad matemática. Esta imagen, a su vez, se encontrará justificada, pues la cuestión ontológica sólo será una extensión de la visión que nos imponga la teoría del significado elegida. Por este motivo Dummett[2] centra su defensa de la lógica intuicionista como la lógica para las matemáticas –que supone la aceptación de una perspectiva antirrealista en dicho contexto– sobre la base de cuestiones relativas al significado.

En el presente trabajo consideraré la teoría del significado propuesta por Dummett a favor del intuicionismo en matemática. Al hacerlo me centraré en un problema que parece surgir en dicha teoría, el problema de la unicidad, que cuestiona la posibilidad de que la noción de demostración sea capaz de garantizar que el contenido de un enunciado pueda ser determinado unívocamente a partir de su uso. En primer lugar, intentaré mostrar que la noción de demostración propuesta por Dummett resulta insuficiente para dar solución a dicho problema, ya que es incapaz de evitar la paradoja escéptica formulada por Wittgenstein en torno a la noción de regla en matemáticas. Y, en segundo lugar, procuraré probar que la objeción realizada por Dummett a la paradoja wittgensteiniana resulta insuficiente para disolverla.

I

La propuesta de Dummett para dar apoyo al intuicionismo en matemáticas parte entonces de una teoría general del significado cuya característica central es considerar que el significado de un enunciado consiste exclusivamente en el papel que juega como instrumento de comunicación entre individuos. Por lo tanto, el significado no puede ser, ni tener como ingrediente, nada que no esté manifiesto en el uso: el significado de un enunciado matemático está determinado de manera exhaustiva por su uso[3]. Tal modelo del significado tiene que ser a su vez, según Dummett, un modelo de la comprensión, esto es, una representación de qué es lo que un individuo conoce cuando conoce el significado. Y aquello que conocemos cuando comprendemos el significado es el uso que podemos hacer de un determinado enunciado, que queda justificado si somos capaces de reconocer una demostración de dicho enunciado. La comprensión del contenido de un enunciado residirá, en última instancia, en esta capacidad para reconocer una demostración, ya que de esta manera seremos capaces de legitimar su uso.

De lo anterior se sigue que, en la teoría dummettiana del significado, la comprensión que un individuo tiene del significado de una oración consiste en su capacidad para reconocer una demostración de él. A partir de aquí, es evidente que la noción central de la teoría del significado de Dummett es la noción de demostración. De esta manera, si la comprensión del significado de un enunciado consiste en la capacidad de reconocer una demostración de él, la comprensión entre los individuos debería estar garantizada mediante una noción de demostración que determine el significado de los enunciados matemáticos de manera unívoca. Puesto que la incomprensión se produce cuando los individuos atribuyen diferentes significados a los enunciados matemáticos, si a partir de la noción de demostración sólo es posible derivar un único significado para un enunciado matemático, la comprensión entre los individuos que comprenden dicho lenguaje quedaría garantizada. Esto nos introduce en el problema de la unicidad, que podría formularse de la siguiente manera: ¿cómo puede la noción de demostración garantizar que todo enunciado tenga un contenido determinado que pueda ser explicado unívocamente en términos de su uso?

Ahora bien, una demostración se desarrolla en conformidad a ciertos principios lógicos o reglas de inferencia, con lo cual esta capacidad para reconocer una demostración de un enunciado consistirá en última instancia en un conocimiento, ya sea explícito o implícito, de las reglas que rigen el uso del enunciado. El problema es que para seguir una demostración y poder reconocerla como tal, tenemos que reconocer varias transiciones como aplicaciones de las reglas de inferencia.

En este punto es pertinente introducir las consideraciones de Wittgenstein[4] respecto de las reglas. Dado que la interpretación de sus argumentos llevada a cabo por Dummett en «La filosofía de las matemáticas de Wittgenstein»[5] se acerca notablemente a la interpretación realizada por Kripke en *Wittgenstein: reglas y lenguaje privado*,[6] expondré la paradoja wittgensteniana siguiendo a éste último autor puesto que en dicho libro presenta un tratamiento más extenso y completo del problema. De acuerdo con Kripke, la dificultad que Wittgenstein advirtió es que a partir de los usos de un enunciado no es posible identificar una única regla como la regla que hemos aplicado. Puesto que ninguna selección finita de usos determina unicidad acerca de la regla que se ha seguido, no podemos determinar cuál es precisamente la regla que seguimos. Por tanto, parecería que no podemos apelar a la expresión de la regla para dar cuenta de los usos que determinan el significado de los enunciados, ya que los usos que hayamos realizado deberán ser necesariamente finitos y, por lo tanto, serán compatibles con más de una regla. Ninguna expresión de una regla puede servir como fundamento del significado de nuestras expresiones, ya que los usos pueden ser reinterpretados en correspondencia con más de una regla. Por tanto, la noción de regla no nos será de ayuda para especificar el significado de nuestras expresiones, ya que ella misma ha quedado indeterminada: no somos capaces de especificar qué regla hemos usado.

A partir de lo anterior es posible observar que la noción de demostración se torna insuficiente para excluir la posibilidad de que seamos capaces de atribuir significados diferentes a una misma expresión, puesto que dicha noción se apoya en la noción de regla. En consecuencia, ya que la noción de demostración resulta insuficiente para determinar el significado de los enunciados matemáticos de manera unívoca, y dado que en la teoría de Dummett la comprensión del significado de un enunciado consiste en ultima instancia en la capacidad de reconocer una demostración de él, se sigue que la comprensión no puede ser garantizada en dicha teoría. De esta manera, la teoría del significado de Dummett sería incapaz de constituir un modelo de la comprensión, ya que no puede garantizar que ésta se cumpla.

Cabe destacar que las consideraciones de Wittgenstein en torno a las reglas en el contexto de la filosofía de las matemáticas se presentan en general como un argumento en contra del platonismo, es decir, en contra de la posición que afirma que el significado de un enunciado está dado por sus condiciones de verdad, que resultan independientes de nuestra capacidad para reconocer el valor de verdad del enunciado. Sin embargo, puesto que su argumento cuestiona, a partir de sus consideraciones acerca de las reglas, la noción misma de demostración, considero que también puede ser aplicado a la posición sostenida por Dummett. En el próximo apartado retomaré este punto.

En suma, es importante notar que el «problema de la unicidad» cuestiona la característica central de la teoría del significado de Dummett: el hecho de que sea posible determinar unívocamente el contenido de un enunciado en términos de su uso. Por otra parte, según Dummett, es necesario que su teoría constituya no sólo una teoría del significado sino también un modelo de la comprensión para que pueda ser considerada un buen argumento a favor del intuicionismo en matemáticas. La idea es que puesto que no es posible decidir entre una imagen platonista y una imagen constructivista del carácter metafísico de la realidad matemática, la elección debe basarse en cuál es la teoría del significado apropiada para describir teóricamente la comprensión de los enunciados matemáticos. Por lo tanto, la teoría que se adopte para dar apoyo al intuicionismo debe ser capaz asimismo de dar cuenta de la comprensión. Sin embargo, si aceptamos el argumento de Wittgenstein, tendremos que aceptar a su vez que la teoría de Dummett resulta insuficiente para dar cuenta de la comprensión de los enunciados matemáticos y que, por lo tanto, no puede ser considerada un buen argumento a favor del intuicionismo. Por estos motivos, considero importante analizar la respuesta de Dummett a la paradoja escéptica en torno a las reglas formulada por Wittgenstein.

II

En «La Filosofía de las Matemáticas de Wittgenstein» Dummett se ocupa del argumento wittgensteiniano acerca de las reglas y formula su propia objeción. A continuación desarrollaré brevemente dicha objeción para luego evaluarla confrontándola con la defensa de la paradoja escéptica realizada por Kripke.[7] Dice Dummett:[8]

> *Consideremos uno de los ejemplos favoritos de Wittgenstein: enseñando a alguien a obedecer órdenes de la forma 'añade n' con ejemplos tomados de los números naturales muy pequeños, le damos la orden 'añade 1' y encontramos que añade dos en el caso de los números del 100 al 199, tres a los números del 200 al 299, y así sucesivamente. Wittgenstein dice que no es necesario que haya habido algo en lo que le dijimos durante la enseñanza, ni en lo que 'había en nuestra mente', que mostrara por sí solo que esto no era lo que pretendíamos que hiciera. Ciertamente esto es verdad, además de que da cuenta de algo im-*

portante sobre el concepto de intención (es un caso notable de lo que Wittgenstein quiere decir cuando afirma en las Investigaciones que si Dios hubiera mirado en mi mente no habría sido capaz de ver ahí a quién me dirigía). Pero supongamos que la enseñanza no solo se dio por medio de ejemplos, sino que se hizo uso también de una formulación explícita de las reglas para formar, a partir de un numeral arábigo, su sucesor. Una máquina puede seguir esta regla: ¿de dónde obtienen los seres humanos la libertad de elección en este respecto que la máquina no tiene?

La réplica de Dummett sugiere que si bien la objeción wittgensteiniana acerca de las reglas se aplica a los usos previos, puesto que siempre es posible reinterpretarlos, resulta discutible el hecho de que sea válida respecto de los usos presentes en caso de que dispongamos de una formulación explícita de las reglas, y agrega que en esas condiciones una máquina estaría capacitada para seguir una regla. Considero que la respuesta de Dummett puede ser vista como involucrando en principio dos aspectos distintos (aunque finalmente ambos parecen confluir): por un lado, apela a una formulación explícita de la regla y, por otro lado, a lo que podríamos llamar la «réplica de las máquinas». Ambos aspectos evitan recurrir a los usos previos para seguir la regla dado que, por ser éstos necesariamente finitos, pueden ser reinterpretados en correspondencia con más de una regla, impidiendo de este modo que sea posible justificar el uso de un enunciado a partir de una regla determinada. Lo que se intenta a través de la respuesta es recurrir a la regla misma para determinar el uso de un enunciado y, como en la teoría de Dummett el significado de un enunciado está dado por su uso, lo que se pretende es determinar el significado mismo del enunciado.

Respecto del primer aspecto, la réplica de Dummett a la paradoja planteada por Wittgenstein parece en principio una reacción perfectamente natural: la idea es que es posible que se aplique cuando no formulamos los principios de inferencia o los formulamos imprecisamente, pero que no se aplica en el caso de que poseamos una formulación estricta de ellos. En este último caso, dado que poseemos la expresión precisa de la regla, sería posible decidir si la aplicación se encuentra o no justificada. Sin embargo, tal como Dummett reconoce, esta respuesta supone que la comprensión de los símbolos en términos de los cuales se formula la regla se encuentra determinada. Pero el problema es que no es posible formular una regla de manera tal que no deje lugar para ninguna interpretación. Por lo tanto, sería necesario recurrir a una explicación de las palabras o símbolos en términos de los cuales se formula la regla. Sería necesaria, en palabras de Wittgenstein, una regla para interpretar una regla. En este caso tendríamos que recurrir a una regla más básica que nos permita explicar las palabras o símbolos contenidos en la regla de la cual partimos. Supongamos que para explicar la expresión «más» para denotar la función de la adición recurrimos a la regla de contar. El problema que surge en este caso es que es posible a su vez reinterpretar dicha regla de una manera no usual. Como es fácil observar, tampoco sería de mayor ayuda apelar a una regla aún más básica, ya que siempre sería posible reinterpretarla de una manera no estándar. Por otro lado, llegará un momento en el que ya no será posible recurrir a una regla más básica, con lo cual intentar responder al desafío mediante una regla para interpretar una regla no resulta de mayor ayuda porque lo que se cuestiona es precisamente la capacidad de las reglas para fijar una interpretación de manera unívoca.

El segundo aspecto de la réplica de Dummett, la «réplica de las máquinas» supone que una máquina es capaz de seguir la regla de la adición de manera tal que otras interpretaciones queden excluidas. Sin embargo, Kripke[9] introduce dudas en este sentido. En primer lugar, es necesario explicitar cómo entendemos el término «máquina», ya que podemos estar pensando tanto en el programa de funcionamiento como en la base material para su funcionamiento. Creo que el caso más interesante es el que se refiere al programa de la máquina y no el que entiende la máquina como un objeto físico, ya que en este último caso la máquina sería finita y, por tanto, aceptaría como material sólo un número finito de números y daría como resultado sólo una cantidad finita de ellos, con lo cual es posible ofrecer una reinterpretación no estándar de ellos.

En cambio, si nos referimos al programa de la máquina, ya no es posible aplicar la objeción de la finitud. Podríamos pensar que el programa consiste en un conjunto de instrucciones que contienen una formulación explícita de las reglas que permiten formar a partir de un numeral su sucesor. Pero el problema que se presenta es que, para escapar a la objeción, el programa debería ser capaz de determinar cuál es la función significada explícitamente por las reglas. Sin embargo, como hemos visto, los símbolos o palabras que componen una regla no poseen un significado fijo, dado que no es posible formular una regla de manera tal que no deje lugar para ninguna interpretación alternativa, con lo cual será necesario entonces disponer de otro programa que nos permita reconocer las palabras o símbolos en términos de los cuales se formulan las reglas. Sería necesario un programa más básico que nos permita explicar las palabras o símbolos contenidos en el programa del cual partimos. El problema que se genera es el mismo que el que surge cuando proponemos una regla para interpretar una regla, ya que también aquí es posible reinterpretar dicho programa de una manera no estándar, puesto que el nuevo programa tampoco puede ser formulado de manera tal que los símbolos y palabras involucradas en él posean una única interpretación. Y también en este caso llegará un momento en el que ya no será posible recurrir a un programa más básico. Con lo cual el intento de responder a la objeción apelando a un programa para interpretar un programa estaría asimismo condenado al fracaso.

Retomando el ejemplo de la adición, podríamos decir, para evitar esta objeción, que el programa de la máquina no interpreta la función de la adición sino que sólo la comporta y la ejecuta. Sin embargo, una respuesta de este tipo se enfrenta con dos problemas. Por un lado, aún suponiendo que la función de la adición contenida en el programa constituye una función objetiva que o bien no necesita de una interpretación, o bien se auto-interpreta (con lo cual no es necesario recurrir a una regla para interpretar una regla), el problema resurge cuando intentamos explicar cómo nosotros comprendemos la función en cuestión. En ese caso, sería necesario recurrir a una explicación de las palabras o símbolos en términos de los cuales se formula la función, porque aún en el caso de que la función contenida en el programa sea una función objetiva que contiene en sí todos sus casos de aplicación correcta, a nosotros no nos es posible acceder a ella. Para nosotros, que por ser finitos somos incapaces de acceder a los infinitos casos de aplicación que están inscriptos en la función objetiva, la comprensión de los símbolos en términos de los cuales se formula la función no se encuentra determinada. Con lo cual será necesario recurrir a una interpretación de ellos que a su vez resultará indeterminada, reproduciéndose de este modo el problema tratado en la respuesta anterior. Por otro lado, una respuesta de este tipo implica considerar a las funciones matemáticas contenidas en el programa como entidades objetivas que poseen una existencia independiente de nuestros métodos de demostración. Resulta evidente que esta respuesta es inaceptable para Dummett, puesto que implica abandonar su posición constructivista y aceptar una posición platonista respecto de las entidades matemáticas. De aquí se sigue que no es posible defender desde una posición como la sostenida por Dummett una respuesta de este tipo, puesto que una y otra resultan incompatibles.

A partir de lo anterior creo que es posible afirmar que la respuesta de Dummett no logra desactivar el argumento presentado por Wittgenstein, ya que ni la formulación explícita de la regla, ni la «réplica de las máquinas» logran eludir el argumento escéptico. Con lo cual parecería que a partir de la posición de Dummett no disponemos de ningún motivo para rechazar el argumento. Ahora bien, si hemos de aceptar el argumento, una de las consecuencias que se sigue es que no es posible realizar una descripción teórica de la comprensión a partir de la noción de demostración. Con lo cual el proyecto de Dummett de proporcionar una teoría del significado que permita justificar la adopción del intuicionismo en matemáticas se vería cuestionado desde su inicio.

Para finalizar, me gustaría retomar la opinión según la cual las consideraciones de Wittgenstein en torno a las reglas en el contexto de la filosofía de las matemáticas constituyen un argumento en contra del platonismo. De acuerdo con la interpretación de Dummett,[10] Wittgenstein adopta una versión extrema del constructivismo en oposición al platonismo. Esta opinión también es sostenida por C. Wright,[11] quien considera que la posición de Wittgenstein constituye un antirrealismo radical.

A partir de estas afirmaciones podríamos pensar la posición de Wittgenstein como una variante antirrealista respecto de las matemáticas y sus argumentos escépticos como dirigidos únicamente contra el realismo en matemáticas, es decir, el platonismo. Sin embargo, creo que adoptar tal interpretación implica subestimar la fuerza del argumento presentado por Wittgenstein.

Como hemos visto, el argumento de Wittgenstein acerca de las reglas cuestiona la posibilidad de que una demostración sea capaz de determinar el sentido de los símbolos o las palabras involucradas en ella, dado que consiste en una actividad reglada. Con lo cual el argumento no sólo sería aplicable a una posición como 7
la platonista, sino también al intuicionismo que Dummett defiende, ya que la noción de demostración constituye la noción central de dicha teoría. El punto es que para la teoría de Dummett la forma general de una explicación del significado debe darse en términos de las condiciones bajo las cuales nos consideramos justificados para afirmar un enunciado, es decir, aquellas circunstancias en las cuales estamos en posesión de una demostración. Con lo cual, lo que se rechaza es la objetividad de la verdad matemática, es decir, la idea según la cual para cada enunciado existe algo en la realidad matemática en virtud de lo cual es verdadero o falso con independencia de nuestros métodos para probarlo, pero se acepta la objetividad de las demostraciones matemáticas. Es decir, una vez que estamos en posesión de una demostración, su objetividad no se cuestiona, ya que la demostración constituye el criterio a partir del cual estamos justificados para afirmar un enunciado. Sin embargo, puesto que esto es precisamente lo que Wittgenstein está cuestionando, considero que es posible afirmar que su argumento se aplica también al constructivismo defendido por Dummett.

Referencias bibliográficas

Dummett, M. (1959), «La Filosofía de las Matemáticas de Wittgenstein», en *Truth and Other Enigmas*.

_______ (1976), «What Is a Theory of Meaning?(II)», en Evans, G. y J. McDowell (eds.), *Truth and Meaning: Essays in Semantics*, Oxford: Oxford University Press.

_______ (1978), *Truth and Other Enigmas*, London: Duckworth.

_______ (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*, Cambridge: Harvard University Press.

Dummett, M. (1973), «Las Bases Filosóficas del Intuicionismo Lógico», en *Truth and Other Enigmas*.

Kripke, S. (1989), *Wittgenstein: reglas y lenguaje privado*, México: UNAM.

Wittgenstein, L. (1988), *Investigaciones filosóficas*, Madrid: Alianza.

_______ (1987), *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid: Alianza.

Wright, C. (1984), «Kripke's account of argument against private language», *Journal of Philosophy* 81, 759-778.

Notas

1 Dummett (1978, 1976, 1991).

2 Dummett (1973).

3 Dummett (1973), p. 297.

4 Wittgenstein (1988, 1987).

5 Dummett (1959).

6 Kripke (1989).

7 Kripke (1989).

8 Dummett (1959), pp. 171-172.

9 Kripke (1989), pp. 36-38.

10 Dummett (1959), p. 246.

11 Wright (1984).