Deducción y conocimiento intuitivo*

Javier Legris
Universidad de Buenos Aires – CONICET

Uno de los supuestos del programa de Hilbert era que los principios más básicos de la matemática debían ser verdades *evidentes,* es decir, su verdad debía justificarse sin recurrir a argumentaciones, de un modo directo, por medio de un conocimiento *intuitivo.* Esta idea de conocimiento intuitivo era tomada de la teoría del conocimiento de la filosofía moderna, en especial de la filosofía kantiana. La teoría de la demostración desarrollada por David Hilbert y sus colaboradores fue pensada como la metodología adecuada para fundamentar las teorías matemáticas de acuerdo con este supuesto.

El núcleo metodológico de la teoría de la demostración era el llamado «punto de vista finito», que se basaba en principios matemáticos considerados intuitivos, la llamada matemática finitaria. Este punto de vista finito se aplica a diferentes tipos de objetos matemáticos: reglas, enunciados moleculares, definiciones, etc., y sus rasgos centrales consisten en limitar las operaciones a un número finito de objetos y funciones, en no tomar en consideración conjuntos infinitos y en no admitir definiciones impredicativas. Sobre la base de los procedimientos admitidos por el punto de vista finito el programa de Hilbert quería reconstruir la matemática *en su totalidad,* incluyendo aquella parte «transfinita», es decir, aquella que trascendía la matemática intuitiva.

Este trabajo se ocupa de la concepción de la deducción que surge al adoptar el punto de vista finito y su propósito es esclarecer el papel que desempeña en esta concepción la idea de un conocimiento intuitivo. En función de este propósito se analiza el concepto de intuición. Se verá que la deducción queda caracterizada en relación con procesos combinatorios aplicados a signos entendidos como objetos.

La teoría de la demostración que Hilbert proponía caracterizaba a la deducción como un proceso *combinatorio*: a partir de supuestos se obtienen consecuencias nuevas por combinación de aquellos. Paul Bernays decía, en un trabajo publicado en 1930, que el carácter *lógico* de las reglas de inferencia descansa en la «combinación» y se muestra en la *ejecución real* (*wirkliche Vorführung*) de la demostración. Esta «ejecución real» de una demostración (que es la deducción) presupone evidencia intuitiva. En otro trabajo de la misma época, Bernays hacía la siguiente observación:

> *La lógica como teoría de los juicios y los razonamientos de ningún modo puede desarrollarse sin un cierto recurso a un conocimiento intuitivo. Se trata aquí de la representación intuitiva de lo discreto, a partir de la cual obtenemos las representaciones combinatorias más primitivas, en particular la de la sucesión (Bernays, 1930, p. 108).*

Esta idea ya había sido expresada por Hilbert, quien en un trabajo publicado en 1922 afirmaba:

> *Como condición previa para la aplicación de inferencias lógicas y la realización de operaciones lógicas algo debe estar dado ya en la representación: ciertos objetos discretos que se dan intuitivamente como vivencia inmediata antes de todo pensamiento (Hilbert, 1922, p. 162, véase también Hilbert, 1926).*

Estas intuiciones de lo discreto eran condición necesaria para la validez de las inferencias lógicas:

> *Si la inferencia lógica tiene que ser segura, entonces estos objetos deben poder ser abarcados completamente en todas sus partes* (loc. cit.).

Estas intuiciones combinatorias son la base de aquello que en el programa de Hilbert se tenía por el núcleo seguro e indudablemente cierto de la matemática: la aritmética finitaria. Aunque sus límites no aparecen nítidamente establecidos en el programa, esta aritmética finitaria incluye sin duda los principios relativos a la función de sucesor, el concepto de recursión primitiva y, tal vez, la inducción completa.[1]

La aplicación del método finitario al concepto de demostración lleva a adjudicarles un carácter intuitivo a las demostraciones. Debe aclararse en qué sentido se afirma aquí que las deducciones que conforman una demostración son *intuitivas*. Es sabido que el concepto de intuición ha recibido en la historia muy variadas interpretaciones. Como una capacidad de conocimiento la intuición se aplica, en un primer sentido, a *objetos*: una intuición de objetos consiste en una captación directa de los mismos a la manera de la percepción. Esta captación puede ser sensible o intelectual. En un segundo sentido, se habla de *enunciados* cuya verdad se conoce por intuición. Este es el caso de verdades *evidentes*: la evidencia para la verdad de un enunciado es dada mediante la intuición. La intuición, así pues, aparece como un método para *justificar* la verdad de enunciados.

De este modo, se puede aceptar:

(1) A es un enunciado intuitivamente evidente si, y sólo si, la verdad de A está justificada por intuición.

De donde se sigue:

(2) Si A es intuitivamente evidente, entonces la verdad de A está justificada.

Obviamente, si la verdad del enunciado A está justificada, entonces puede afirmarse que A es verdadero. Por ello, la intuición es considerada como una capacidad de conocimiento que sirve para determinar la *verdad* de enunciados.

Este segundo sentido referido a enunciados descansa en el primero: los enunciados cuya verdad es justificada por intuición hablan de objetos que son captados intuitivamente. Estas intuiciones de lo discreto eran la condición necesaria de la validez de las inferencias lógicas. Como decía Hilbert,

> *si la inferencia lógica tiene que ser segura, entonces estos objetos deben poder ser abarcados completamente en todas sus partes* (loc. cit.).

Estos objetos captados intuitivamente eran, en el programa de Hilbert, el núcleo seguro e indudablemente cierto de la matemática, a saber, la aritmética finitaria. Los objetos intuidos, la «base intuitiva pura» de esta aritmética finitaria eran determinados objetos sensibles: marcas, signos concretos; por ejemplo barras o los signos 1+1+1+1 desprovistos de su significado numérico (véase Hilbert, 1922, p. 163, y Hilbert, 1926). Es la combinación de estos signos concretos por medio de operaciones lo que constituye la aritmética finitaria. Aunque sus límites no aparecían nítidamente establecidos en el programa, esta aritmética finitaria incluía sin duda los principios relativos a la función de sucesor y el concepto de recursión primitiva (una elucidación de la naturaleza y métodos de esta aritmética finitaria puede encontrarse en Lassalle Casanave 1998). Así, las operaciones finitarias pueden ser vistas como una interpretación del conocimiento matemático intuitivo, es decir vale la igualdad

(3) aritmética finitaria = aritmética intuitiva.

Sus leyes son enunciados evidentemente verdaderos, cuya verdad es conocida de manera intuitiva.

Sobre esta base puede afirmarse:

(4) Si A es un enunciado verdadero de la aritmética finitaria, entonces la verdad de A está justificada por intuición.

Esta es la tesis gnoseológica central que parece subyacer al programa de Hilbert (Charles Parsons la ha formulado explícitamente en su trabajo de 1998). Obviamente, vale la pena remarcar que todo procedimiento que exceda la matemática finitaria no será intuitivo, es decir, no conducirá a la afirmación de verdades evidentes e indubitables.

En este punto debe aclararse qué significa que las deducciones realizadas de acuerdo con el punto de vista finito sean *intuitivas*. Se pueden establecer dos sentidos diferentes, según se considere la intuición como aplicada (i) a la justificación de la verdad de enunciados o (ii) a la justificación de la corrección de procesos de deducción. En el primer caso, la deducción proporciona una justificación intuitiva de *enunciados* verdaderos, es decir, el enunciado final de la deducción también está justificado por intuición. En el segundo caso el *proceso* de aplicación de reglas que constituye la deducción queda justificado de manera intuitiva. El primer sentido es razonable únicamente si se piensa que las deducciones *preservan* el carácter intuitivo de los enunciados. Si las premisas de una deducción son conocidas intuitivamente, entonces la conclusión también lo es. Este sentido es cuestionable en la medida en que la deducción no es una manera *inmediata* de reconocer la verdad de un enunciado.

El segundo sentido, presente en el texto de Hilbert citado arriba, se encuentra ya en la discusión clásica que Descartes hace de este problema en la Regla III de sus *Reglas para la dirección del espíritu*. Descartes distingue entre intuición y deducción diciendo que en esta última hay un «movimiento» o «sucesión» del pensamiento. Pero este movimiento «intuye cada cosa en particular» (*Regulae* AT, X, 369) y el encadenamiento de cada uno de los pasos de esta sucesión lleva a la certeza del punto final. Cada elemento que es captado en ese movimiento resulta intuido. El hecho de que cada paso de la deducción sea correcto es conocido por intuición y el carácter intuitivo de todo el proceso –afirmado en el texto de Hilbert– sólo puede afirmarse en un sentido secundario o derivado. En suma, no es el resultado último de la deducción aquello que es conocido por intuición, sino que cada paso se justifica por intuición. Este concepto de intuición es empleado para determinar lo que se entiende por *validez* o corrección de cada paso de una deducción: la validez tanto de las reglas elementales como la de su aplicación se justifican por intuición. En lo que hace a la teoría hilbertiana de la demostración, todo esto se resume del siguiente modo: la afirmación de que un enunciado es demostrable de acuerdo con procedimientos finitarios se funda en un conocimiento intuitivo.

La caracterización del proceso de deducción como aparece en Descartes está teñida de referencias psicológicas, como, por ejemplo, la dependencia de la memoria de los sujetos concretos de conocimiento. Por el contrario, en el punto de vista finito, la interpretación de la intuición deja de lado estos aspectos: una deducción es intuitiva porque la estructura matemática que subyace a ella es finitaria. Es decir, los procedimientos combinatorios mediante los cuales se construye la deducción son finitarios. Al postular que todos los procedimientos combinatorios que constituyen una demostración formal pertenecen a la aritmética finitaria, el carácter *cierto* del proceso de demostración quedaba asegurado. Si los procesos inferenciales que resultan de estas reglas tienen una base finitaria, entonces puede asegurarse la clausura deductiva de la teoría, es decir, un «control» deductivo sobre la misma. Pero además, estos procedimientos finitarios se corresponden con el conocimiento matemático intuitivo más elemental que todo sujeto de conocimiento posee.

El carácter finitario de la deducción fue mostrado explícitamente por el matemático francés Jacques Herbrand en su tesis doctoral de 1930. Su resultado se conoce como «teorema de Herbrand». Bernays lo distinguió como el «teorema central» de la lógica debido a que asegura el carácter efectivo de las deducciones lógicas. El teorema afirma que el problema de demostrar las leyes lógicas que incluyen cuantificadores se puede reducir a los métodos de demostración necesarios para demostrar leyes relativas exclusivamente a conectivas, los cuales son finitarios (Herbrand, 1930). Así, se establecía que la deducción lógica no requería más que el «pensar finito»; los procedimientos de deducción elementales eran finitarios. Siguiendo la perspectiva que he presentado hasta ahora, el proceso de deducción tiene una base intuitiva que justifica su validez. Sin embargo, esto no implica que todos los principios de los que parte la deducción sean justificables por intuición.

El teorema de Herbrand presupone, de algún modo, un tratamiento finitario de los cuantificadores. No voy a considerar aquí los procedimientos técnicos que Herbrand desarrolló. Sin embargo, voy a intentar presentar una idea afín (que es muy familiar para aquellos que conozcan la deducción natural de Gentzen). Piénsese en el caso del cuantificador universal. ¿Qué condiciones presenta una deducción para que se pueda afirmar una fórmula que lo contenga como símbolo lógico principal? En la deducción tiene que haber aparecido una variable libre que no aparezca en las premisas de la deducción. Esto quiere decir que lo que se haya afirmado en los sucesivos pasos de la deducción acerca de esta variable no se afirma de ninguno los términos que aparezcan en las premisas. Esta independencia de la variable libre de lo que se afirme en las premisas es lo que permite afirmar su universalidad: lo que se afirma de él se afirma de «cualquiera» del dominio en consideración. Esta idea puede parecer extraña al no emplear ideas más habituales como las de interpretación o satisfacibilidad. No obstante, es la idea bien conocida de asignar como referencia de esa variable libre a un «objeto arbitrario» del dominio.

Así pues, en el programa de Hilbert las deducciones lógicas eran una parte del «momento combinatorio» del método axiomático, es decir, un elemento (por demás esencial) del «pensar finito». Sin embargo, la deducción lógica también es considerada *qua* objeto de formalización axiomática como base de la matemática en su totalidad y es objeto de una prueba de consistencia. Tal como Hilbert mismo afirmaba, los procedimientos deductivos mismos debían ser objeto de la formalización dando lugar a sistemas formalizados de lógica.

De este modo, hay dos planos en que Hilbert tematiza la lógica: de un lado, la lógica de los procedimientos finitarios, que es la que debía *usarse* en la teoría de la demostración y, de otro lado, la lógica que subyace a la matemática clásica, a ser fundamentada y formalizada. La situación se puede resumir con las siguientes palabras. En su programa, Hilbert quería reconstruir formalmente la lógica clásica con el fin de probar su consistencia y otorgarle un fundamento seguro. Esta reconstrucción formal debía llevarse a cabo en el marco de una «lógica del pensamiento finito», con características propias. Esta era la lógica «concreta» basada en un conocimiento intuitivo.

Resulta natural pensar que esta «lógica del pensamiento finito» debía encontrar problemáticos ciertos principios, de un modo comparable a como el intuicionismo objetaba la validez universal del principio de tercero excluido o el de doble negación. En un trabajo publicado en 1927, Bernays, al exponer los principios lógicos de acuerdo con el programa de Hilbert, reconocía las siguientes reglas de inferencia: (1) el *dictum de omni et nullo*, (2) el *modus ponens*, (3) la ley de no contradicción y la ley del tercero excluido y (4) el razonamiento por casos (Bernays, 1927). Ahora bien, Bernays encontraba problemática la negación, necesaria para el principio de tercero excluido, y le adjudicaba la función de *elemento ideal* en la sistemática lógica, siendo su función la de completar la presentación de la lógica como sistema. Aquí Bernays pensaba en la negación clásica que implica la referencia a totalidades eventualmente infinitas, lo que era cuestionable desde el punto de vista del proceso de demostración.

Sin embargo, Hilbert encontró en los cuantificadores a aquellas expresiones que podían referirse a totalidades infinitas.

> *¿Dónde ocurre por primera vez el salto más allá de lo intuitivo, concreto y finito? Evidentemente en la aplicación de los conceptos 'todos' y 'hay' (Hilbert, 1923, p. 36).*

La referencia a un dominio arbitrario no era posible en la teoría de la demostración. Las demostraciones finitarias requieren únicamente la consideración de totalidades finitas (justamente porque el proceso de demostración es finito). Por esta razón, Hilbert comenzó tratando los cuantificadores universal y existencial reduciéndolos respectivamente a cadenas de conjunciones y disyunciones. Bajo estas condiciones, el principio del tercero excluido resultaba válido y los cuantificadores eran interdefinibles con el auxilio de la negación, en concordancia con la lógica clásica (v. Hilbert, 1923, p. 181 ss.). En este caso, los cuantificadores se tornaban superfluos y la lógica quedaba limitada a las conectivas.

Ahora bien, la fundamentación finitaria de la matemática en su totalidad, en particular el análisis, exigía tomar en cuenta cuantificadores que se aplicaran a «lo transfinito» pero que pudieran ser caracterizados de manera finitaria. La solución de Hilbert se basó en las similitudes entre cuantificadores y funciones de elección. En su trabajo publicado en 1923, «Los fundamentos lógicos de la matemática», Hilbert introduce una función τA, que asigna a todo predicado $A[x]$ un objeto determinado y la llama «función transfinita»[2]. Respecto de esta función vale el «axioma transfinito» $A(\tau A) \rightarrow A[x]$, que tiene el siguiente significado: Si A se predica del objeto τA, entonces se predica de cualquier x. Así, el cuantificador universal se define a partir de la equivalencia $A(\tau A) \leftrightarrow xA[x]$. En «Sobre el infinito», esta función se describe como εA, para la cual Hilbert presenta un «axioma de elección», conversa del anterior, de la forma $A[x] \rightarrow A(\varepsilon A)$. Dado que toda demostración es finita, esta función se aplica sólo un número finito de veces y, por lo tanto, el *proceso* mismo de demostración que incluyera cuantificaciones universales es finito.

La introducción de estas funciones en el programa metamatemático de Hilbert no era del todo transparente. El problema estaba en el significado de la función épsilon. En trabajos de Hilbert posteriores a 1930 no aparecía esta función de selección, sino que los cuantificadores eran presentados mediante los axiomas usuales –hoy en día– de la lógica clásica de primer orden.

Como es sabido, la solución de Hilbert al problema del infinito consistió en la consideración de totalidades infinitas como elementos *ideales*, en un sentido que recuerda a las *ideas de la razón* de la filosofía kantiana (véase Hilbert, 1926, que es donde esta idea aparece claramente formulada por primera vez). Así, todos los enunciados que envuelven cuantificación universal o existencial de manera indeterminada, eran enunciados ideales, cuya verdad nunca podía ser justificable por intuición. ¿Cómo era, entonces, que podían ser justificados? La solución de Hilbert se basaba precisamente en dos rasgos centrales de su teoría de la demostración: (i) la consideración de objetos cualesquiera sin significado, meras marcas (lo que se ha llamado «abstracción formal») y (ii) la justificación intuitiva de las afirmaciones acerca de estas marcas. Los elementos ideales se introducían como marcas de este tipo, perdiendo su significado no finitario. Lo que se obtenía era un «sistema formal» y la justificación de la verdad de enunciados estaba dada por una demostración de su no contradicción.

En un trabajo sobre el principio del *tertium non datur* publicado en 1931, Hilbert identificaba «no contradictorio» con «correcto» y «contradictorio» con «falso» (Hilbert, 1931b, p. 122 ss.). De este modo podía demostrar la validez del principio del tercero excluido irrestricto, referido a totalidades infinitas, como un enunciado ideal que es considerado por Hilbert necesario para la «armonía» y la «clausura» del sistema de la matemática clásica en su totalidad (véase Hilbert, 1931b, p. 125). Por lo tanto, todo enunciado que contenga negaciones es considerado un enunciado ideal (véase Hilbert, 1931a, p. 494).

Referencias bibliográficas

Bernays, P. (1927), «Probleme der theoretischen Logik», *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften* 33, 369-377. Reimpreso en Bernays (1976), pp. 1-16.

_______ (1930), «Die Grundgedanken der Fries'schen Philosophie in ihrem Verhältnis zum heutigen Stand der Wissenschaft», *Abhandlungen der Fries'schen Schule. Neue Folge* 5, 99-113.

_______ (1976), *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Descartes, R. (1980), *Regulae ad directionem ingenii*, versión española de Ezequiel de Olaso y Tomás Zwanck en René Descartes *Obras escogidas*, 2da ed, Buenos Aires: Charcas.

Herbrand, J. (1930), *Recherches sur la théorie de la démonstration*, Tesis doctoral presentada ante la Universidad de Paris. Versión inglesa en Herbrand, J. (1971), *Logical Writings*, W. Goldfarb (comp.) Dordrecht: Reidel.

Hilbert, D. (1922), «Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung», *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburger Universität* 1, 157-177.

_______ (1923), «Die logischen Grundlagen der Mathematik», *Mathematische Annalen* 88, 151-165.

_______ (1926), «Über das Unendliche», *Mathematische Annalen* 95, 161-190. Versión inglesa Heijenoort, J. v. (comp.) (1967), *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge, Mass.: Harvard University Press, pp. 367-392.

_______ (1931a), «Beweis des Tertium non datur», en *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse* (Heft 2), 120-125.

_______ (1931b), «Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre», *Mathematische Annalen* 104, 485-494.

Lassalle Casanave, A. (1998), «O programa de Hilbert e a origem da teoria da demonstraçao», *Episteme* 3, 7-13.

Parsons, C. (1998), «Finitism and Intuitive Knowledge», en Schirn, M. (comp.), *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford: Clarendon Press, pp. 249-270.

Notas

* Este trabajo refleja parte de un proyecto de investigación llevado a cabo por el autor en el Instituto de Filosofía de la Universidad de Erlangen-Nürnberg (Alemania) en 1999 y financiado mediante una beca de la Fundación Alexander von Humboldt.

1 Tait en su artículo «Finitismo» ha identificado la aritmética finitaria con la aritmética recursiva primitiva.

2 Adviértase que esta función es de segundo orden. Hilbert admite fórmulas con variables libres.