El formalismo hilbertiano

Abel Lassalle Casanave
Universidade Federal de Santa Maria

Introducción

Una formulación adecuada del Programa de Hilbert debe distinguir, en primer lugar, entre la aritmética formal y la aritmética contentual que aquélla formaliza; en segundo lugar, debe distinguir dentro de la aritmética contentual por lo menos dos niveles de comprensión y evidencia o, dicho de otra manera, de confiabilidad. El mayor grado de comprensión es el que acompaña a la llamada aritmética finitaria o aritmética intuitivo-contentual. Pero la aritmética contentual incluye conceptos y métodos que carecen de la transparencia de los conceptos y métodos finitarios.

Ahora bien, la aritmética formal representa dentro del formalismo los conceptos y métodos de la aritmética contentual. El primer paso de la metamatemática hilbertiana era demostrar la consistencia de la aritmética formal, la cual, desde la perspectiva de la metamatemática, se reduce a secuencias de símbolos desprovistos total o parcialmente de significado. Así, el formalismo hilbertiano debe entonces ser calificado como *metodológico*. Dado que la demostración metamatemática de consistencia legitimaría los conceptos y métodos de la aritmética contentual objeto, por ejemplo, de la crítica constructivista, esto obliga a que los conceptos y métodos metamatemáticos sean de naturaleza intuitivo-contentual.

En nuestro trabajo pretendemos exponer con mayor detalle las relaciones aquí señaladas entre aritmética contentual, aritmética formal y metamatemática intuitivo-contentual.

El Programa de Hilbert es una tentativa de minimizar el papel de las consideraciones filosóficas cuando se trata de resolver el problema de los fundamentos de la matemática. Ahora bien, minimizar no implica eliminar por completo. En efecto, Hilbert adscribe a una concepción filosófica fundamental –son sus palabras– que es pensada como una exigencia para el conocimiento científico en general: el llamado punto de vista finito. Las condiciones que tal punto de vista impone se encuentran de acuerdo, según Hilbert, con las establecidas por la teoría del conocimiento de Kant. En particular, las mismas condiciones se aplican también al conocimiento matemático. Escribe Hilbert:

> *Ya Kant ha enseñado –y por cierto esto constituye una parte significativa de su teoría–, que la matemática dispone de un contenido asegurado independientemente de toda lógica y por eso jamás puede ser fundada por la lógica sola. Por esto también los esfuerzos de Frege y Dedekind debían fracasar. Aún más, algo dado previamente en la representación es como una precondición para la utilización de inferencias lógicas y para el funcionamiento de las operaciones lógicas: ciertos objetos concretos extra-lógicos que están presentes intuitivamente como vivencia inmediata, previamente a todo pensamiento. Para que el inferir lógico sea seguro, estos objetos deben dejarse ver, de un solo golpe de vista, completamente en todas sus partes, y su manifestación, su diferencia, su seriación recíproca o su concatenación, son dadas inmediata e intuitivamente, al mismo tiempo que los objetos, como algo que no se deja reducir a alguna otra cosa o que no precisa de una reducción (Hilbert, 1925, pp. 170-171).*[1]

Un análisis detallado de este texto mostraría, según nos parece, que Hilbert apunta aquí fundamentalmente a la necesidad, indispensable para hablar de conocimiento teórico desde el punto de vista de Kant, del tipo de representaciones que éste denominaba intuiciones. En efecto, para Kant es por medio de intuiciones que los objetos nos son dados, siendo tales representaciones calificadas de singulares e inmediatas por oposición a las representaciones conceptuales, universales y mediatas.

Como es bien conocido, el antilogicismo de Kant se fundamenta precisamente en la exigencia de un tal componente intuitivo: la matemática es conocimiento por construcción de conceptos, donde por construir un concepto se entiende exhibir apriori la intuición que corresponde al mismo. El modelo de esta filosofía de la matemática es la geometría sintética clásica: de nada nos servirá analizar el concepto de triángulo para conocer que la suma de sus ángulos internos es igual a dos rectos; es necesario partir para la intuición, pura y no empírica, cuyo auxilio indispensable nos permitirá establecer la igualdad en cuestión. Luego, podríamos esperar que Hilbert tuviese en mente la noción kantiana de construcción ostensiva. No obstante, el pasaje arriba citado continúa con esta observación sorprendente:

> *Y, en especial, en la matemática, los objetos de nuestra consideración son los signos concretos mismos, cuya figura, siguiendo nuestro punto de vista, es inmediatamente clara y reconocible (Hilbert, 1925, p. 171).*[2]

A primera vista, no parece posible afirmar que esta declaración sea consecuente con la concepción kantiana arriba descripta. En efecto, las figuras geométricas no son para Kant signos que están en el lugar de conceptos; muy por el contrario, son representaciones intuitivas –especialísimas, es claro– de conceptos geométricos. De hecho, una de las peculiaridades de la filosofía de la matemática madura de Kant es haber abandonado la concepción leibniziana de las figuras como signos. Ahora bien, Hilbert no está aplicando esta concepción a la geometría y sí a la aritmética, lo cual es aún más sorprendente:

> *En la teoría de números tenemos los signos numéricos*
> *1, 1 1, 1 1 1, 1 1 1 1 1,*
> *donde cada signo numérico es intuible y por eso cognoscible que a un 1 siempre sigue otra vez 1. Estos signos numéricos –ellos mismos objetos de nuestra consideración– no poseen en sí mismos, de ninguna manera, significado (Hilbert, 1925, p. 171).*[3]

Ahora bien, en la teoría de números usamos también otros signos, los cuales significan algo y sirven para la comunicación, por ejemplo, el signo 2 como abreviatura del signo numérico **1 1**, o el signo numérico 3 como abreviatura del signo numérico **1 1 1**; más aún, utilizamos los signos +, =, >> y otros que sirven para la comunicación de afirmaciones. Así, 2+3 = 3 + 2 debe servir para comunicar el hecho de que se trata del mismo signo numérico, a saber, **1 1 1 1 1**, en cuanto tomamos cuidado de las abreviaturas utilizadas. De la misma manera, 3 > 2 sirve para comunicar el hecho de que el signo **1 1 1** sobrepasa al signo **1 1**, esto es, que el segundo es una parte propia del primero.

El punto es que aquí algunos estudiosos han visto una suerte de empirismo en Hilbert: las fórmulas numéricas del tipo «2 + 3 = 3 + 2» o «3 > 2» serían el análogo de los enunciados observacionales de la ciencia empírica. Pero esta lectura es errónea, pues no reconoce un hecho notable: Hilbert concibe el apoyo intuitivo propio de la aritmética no en términos de la noción de construcción ostensiva propia de la geometría, sino en términos de otra noción de construcción, a saber, la de construcción simbólica o *characteristica*, que Kant reservaba para el álgebra.

Creemos que con esta lectura algunos malentendidos pueden facilmente deshacerse, aunque algunas dificultades permanezcan. En primer lugar, no hay aquí empirismo alguno: se puede simultáneamente reconocer el carácter *a priori* de las verdades matemáticas, sin por ello recusar el carácter necesario de la manipulación simbólica en matemática. El ejemplo ilustre aquí es el de Leibniz y, de hecho, la noción de construcción simbólica es una herencia leibniziana que Kant conservó del período precrítico para el tratamiento del álgebra, aunque no, como ya dijimos, para la geometría. Una dificultad obvia, observada ya por Eberhard, un contemporáneo y crítico de Kant, es que tal noción de construcción no podría en absoluto justificar el carácter sintético del álgebra y, agregado nuestro, tampoco el de la aritmética.

Pero la teoría elemental de números, de cualquier manera, no se agota en las ecuaciones elementales arriba indicadas. En efecto, la teoría de números incluye afirmaciones universales, para las cuales es necesario el recurso a variables y métodos de demostración para tal tipo de proposiciones. El problema es que el recurso a variables, combinado con el uso de operadores proposicionales o de cuantificadores, llevan fuera del ámbito del llamado punto de vista finito, esto es, conducen a afirmaciones que son interpretables como refiriéndose a una cantidad infinita en acto de objetos. Un ejemplo de Hilbert ilustra el punto:

> *Así, por ejemplo, el enunciado que afirma que, si **a** es un símbolo numérico, debe valer siempre*
> ***a + 1 = 1 + a***
> *desde el punto de vista finito no es pasible de negación (Hilbert, 1925, p. 173).*[4]

Lo que está aquí en juego es el principio de tercero excluido criticado por los intuicionistas. Tal enunciado es un ejemplo de enunciado ideal o transfinito, sin sentido desde el punto de vista finito. Naturalmente, Hilbert no propone una reducción de los métodos de demostración usuales, que envuelven, por ejemplo, el uso sistemático de tercero excluido, sino garantizar su uso. Escribe Hilbert:

> *[A]sí debemos aquí sumar los enunciados ideales a los enunciados finitarios, para preservar las reglas formales simples de la lógica aristotélica (Hilbert, 1925, p. 174).*[5]

La solución para este problema, el del agregado de enunciados ideales, se inspira en el álgebra: no se le atribuye a las afirmaciones universales significado alguno, como antes a los signos numéricos. De las mismas pueden derivarse fórmulas, a las que se les puede atribuir significado en cuanto las concebimos como comunicación de enunciados finitarios. Un tratamiento semejante es dado a las fórmulas existenciales. La matemática así considerada pasa a ser entendida como un *stock* de fórmulas: a) de fórmulas cuya comunicación contentual abarca enunciados finitarios; b) de fórmulas que no significan nada y que son las figuras ideales de la teoría.

Pero el problema es que las operaciones lógicas, cuando son aplicadas a enunciados ideales, ya no tienen la misma confiabilidad que tienen cuando son aplicadas, de manera restringida, a enunciados finitarios. Se formaliza entonces la lógica, que es entendida también como parte del *stock* de fórmulas sin significado finitario. Se obtiene un sistema formal que incluye como fórmulas tanto los enunciados ideales cuanto los enunciados finitarios, distinción que es externa al sistema formal. El objetivo del Programa de Hilbert será la demostración de consistencia del sistema formal, demostración que es entendida como criterio suficiente para la aceptación de conceptos y métodos constructivamente criticables. Pero una demostración exigirá procedimientos que no puedan ser criticados desde tal punto de vista: la metamatemática es matemática contentual-finitaria. Resume Hilbert:

> *El pensamiento fundamental de mi teoría de la demostración es el siguiente: Todo aquello que se relaciona con la matemática en el sentido vigente hasta ahora es fuertemente formalizable de modo que la propria matemática o la matemática en sentido estricto consiste en fórmulas. Éstas se diferencian de las fórmulas usuales de la matemática sólo en que además de los signos habituales contienen signos lógicos, especialmente aquél para «se sigue» (→) y aquél para «no»(–). Ciertas fórmulas que sirven como fundamento del edificio formal de la matemática son llamadas axiomas. Una demostración es una figura que, como tal, debe manifestarse a nosotros intuitivamente; consiste en inferencias donde cada una de las premisas o es un axioma o coincide con la fórmula final de una inferencia que aparece anteriormente en la demostración., esto es, se origina por substitución en una tal fórmula final o por substitución en un axioma. En lugar del inferir contentual aparece en la teoría de la demostración un procedimiento externo según reglas, a saber, el uso de esquemas de inferencia y el uso de la substitución. Una fórmula debe llamarse demostrable cuando ella es o un axioma o la fórmula final de una demostración.*
> *En cierto modo, una nueva matemática corresponde a la matemática propiamente formalizada, la metamatemática, la cual sirve para hacer más segura aquélla, en la cual –en contraposición al modo puramente formal de la matemática en sentido estricto– aparecen inferencias contentuales, pero solamente para probar la ausencia de contradicción de los axiomas (Hilbert, 1931, p. 192).*[6]

Ahora bien, para algunos estudiosos el formalismo hilbertiano sería *extremo*: la aritmética consistiría en secuencias de símbolos sin significado producidas dentro de un sistema formal. Para otros, especialmente en la literatura reciente, el formalismo de Hilbert sería *moderado*: en el todo de la aritmética reconoceríamos una parte constituida por secuencias de símbolos sin significado –la parte *ideal* o transfinita– que tendría como función servir de instrumento para la deducción de secuencias de símblos con significado –la parte *real* o finitaria.[7]

Nuestra tesis, que hemos formulado esquemáticamente en otros lugares, es que el formalismo hilbertiano debe ser calificado como *metodológico*:[8] es desde la perspectiva de la metamatemática que la aritmética (o la matemática en general) se reduce a secuencias de símbolos desprovistos (total o parcialmente) de significado. Y esto es así porque sería la demostración metamatemática de consistencia la que legitimaría los conceptos y métodos de la aritmética contentual objeto de la crítica constructivista. Por cierto, esto obliga a que los conceptos y métodos metamatemáticos sean de naturaleza contentual y que exiban, como exige Hilbert, la misma confiabilidad de los conceptos y métodos de la aritmética finitaria. Pero esto no implica una reformulación radical de la matemática que pasaría a ser comprendida como un sistema de fórmulas sin significado como objetó Hermann Weyl, pues, como agrega Hilbert:

> *Los axiomas y los enunciados demostrables, esto es, las fórmulas que aparecen en este juego de intercambios son las imágenes de los pensamientos que han constituido el proceder corriente de la matemática hasta ahora (Hilbert, 1931, p. 192).*[9]

Para nosotros la sustancia de esta última afirmación citada es la siguiente: no se puede pretender que una forma de comprensión palmaria, sea bajo la forma de la intuición cartesiana, kantiana o intuicionista, acompañe los conceptos y métodos matemáticos. El conocimiento matemático exige la utilización de un aparato simbólico que substituye una comprensión epifánica las más de las veces inalcanzable. Se trata aquí mucho más del pensamiento ciego o conocimiento simbólico de Leibniz que de la filosofía de la matemática de Kant.[10] De hecho, la lectura que Hilbert hace de Kant nos devuelve el Kant precrítico, cuya filosofía de la matemática tiene la impronta de las concepciones de Leibniz.

Referencias bibliográficas

Detlefsen, M. (1979), «On Interpreting Gödel's Second Theorem», *Journal of Philosophical Logic* 8, 297-313.

______ (1986), *Hilbert's Program. An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Reidel.

______ (1990), «On an alleged refutation of Hilbert's Program using Gödel's First Incompleteness Theorem», *Journal of Philosophical Logic* 19, 343-377.

______ (1993), «Hilbert's Formalism», *Revue Internationale de Philosophie* 186(4), 285-304.

Ferrarin, A. (1995), «Construction and Mathematical Schematism. Kant and the Exhibition of a Concept in Intuition», *Kant Studien* 86 (2), 131-174.

Giaquinto, M. (1983), «Hilbert's Philosophy of Mathematics», *British Journal for the Philosophy of Science* 34, 119-132.
Hilbert, D. (1925), «Über das Unendliche», *Mathematische Annalen* 95, 161-190. (Utilizamos una traducción inédita al castellano de Carlos Gonzalez, con alguna variación insignificante.)
_______ (1931), «Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre», *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, New Cork: Chelsea, 1970, pp. 192-195.
Hintikka, J. (1969), «On Kant's Notion of Intuition (Anschauung)», en Penelhum, T. y J. MacIntosh (eds.), *The First Critique: Reflections on Kant's «Critique of Pure Reason»*, Belmont, California: Wadsworth Publishing Co., pp. 38-53.
Lassalle Casanave, A. (1996), «Formalismo metodológico», *Papeles uruguayos de filosofía* 1, 5-8.
_______ (1997), «Hilbert y el empirismo lógico», *Revista de Filosofia* XII (1/2), 29-45.
_______ (1998), «Em torno da interpretação operacionalista do Programa de Hilbert», *Manuscrito* XXI (1), 85-106.
Parsons, Ch. (1969), «Kant's Philosophy of Arithmetic», en Morgenbeser, S., Suppes, P. and M. White (eds.), *Philosophy, Science and Method: Essays in Honor of Ernest Nagel*, New York: St. Martin's Press, pp. 568-594.
_______ (1998), «Finitism and Intuitive Knowledge», en Schirm, M. (ed.), *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford: Clarendon Press, pp. 249-270.
Prawitz, D. (1981), «Philosophical aspects of proof theory», en Floistad, G. (ed.), *Contemporary Philosophy: A New Survey*, vol. 1, Dodrecht/Boston/Lancaster: Martinus Nijhoff, pp. 235-277.
Sieg, W. (1999), «Hilbert's Programs: 1917-1922», *The Bulletin of Symbolic Logic* 5 (1), 1-44.
Smorynski, C. (1988), «Hilbert's Program», *CWI Quarterly* 1, 3-59.
Thompson, M. (1972-73), «Singular Terms and Intuitions in Kant's Epistemology», *Review of Metaphysics* 26, 314-343.
Young, J. (1982), «Kant on the construction of Arithmentical Concepts», *Kant-Studien* 73 (1), 17-46.

Notas

1 «Schon Kant hat gelehrt - und zwar bildet dies einen integrierenden Bestandteil seiner Lehre -, dass die Mathematik über einen unabhängig von aller Logik gesicherten Inhalt verfügt und daher nie und nimmer allein durch Logik begründet werden kann, weshalb auch die Bestrebungen von Frege und Dedekind scheitern mussten. Vielmehr ist als Vorbedingung für die Anwendung logischer Schlüsse und für die Betätigung logischer Operationen schon etwas in der Vorstellung gegeben: gewisse, ausser-logische konkrete Objekte, die anschaulich als unmittelbares Erlebnis vor allem Denken da sind. Soll das logische Schliessen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen oder Nebeneinandergereihtsein ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich gegeben als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren lässt oder einer Reduktion bedarf.»

2 «Und insbesondere in der Mathematik sind Gegenstand unserer Betrachtung die konkreten Zeichen selbst, deren Gestalt unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich und wiedererkennbar ist.»

3 «In der Zahlentheorie haben wir die Zahlzeichen

1, 1 1, 1 1 1, 1 1 1 1 1

wo jedes Zahlzeichen anschaulich dadurch kenntlich ist, dass in ihm auf 1 immer wieder 1 folgt. Diese Zahlzeichen - selbst Gegenstand unserer Betrachtung - haben an sich keinerlei Bedeutung.»

4 «So ist z.B. die Aussage, dass, wenn **a** ein Zahlzeichen ist, stets

$$\mathbf{a} + \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{a}$$

sein muss, vom finiten Standpunkt *nicht negationsfähig.*»

5 «/.../ so haben wir hier *zu den finiten Aussagen die idealen Aussagen zu adjungieren,* um die formal einfachen Regeln der üblichen Aristotelischen Logik zu erhalten.»

6 «Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist nun folgender:
Alles, was im bisheringen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so dass die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, dass ausser den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für «folgt» (→) und für «nicht» (–), darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Fundament des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muss; er besteht aus Schlüssen, wo jede der Prämissen entweder Axiom ist oder mit der Endformel eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt, bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel oder einem Axiom entsteht. An Stelle des inhaltlichen Schliessens tritt in der Beweistheorie ein äusseres Handeln nach Regeln,nämlich der Gebrauch des Schlussschemas und der Einsetzung. Eine Formel soll beweisbar heissen, wenn sie entweder ein Axiom oder die Endformel eines Beweises ist.
Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine gewissermassen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der -im Gegensatz zu den rein formalen Schlussweisen der eigentlichen Mathematik - das inahltliche Schliessen zur Anwedung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome.»

7 Giaquinto (1983), Detlefsen (1979, 1986, 1990, 1993), Smorynski (1988) defienden variantes de interpretaciones instrumentalistas del Prograna de Hilbert que deben ser incluídas como formalistas moderadas. Giaquinto y Detlefsen insisten en relacionar las concepciones de Hilbert con tesis empiristas. La distinción entre interpretaciones formalistas moderadas y extremas se encuentra en Prawitz (1986).

8 Lassalle Casanave (1996, 1997, 1998). Hemos encontrado una confirmación de nuestro punto de vista en Sieg (1999), quien afirma que el sistema formal, que expresa la matemática clásica, es programaticamente tomado como un *formula game*. Nos parece que esto se aproxima mucho a nuestra noción de «formalismo metodológico».

9 «Die Axiome und beweisbaren Sätze, d. h. die Formeln, die in diesem Wechselspiel entstehen, sind die Abbilder der Gedanken, die das übliche Verfahren der bisherigen Mathematik ausmachen.»

10 El papel de la intuición en la filosofía de la matemática de Kant ha sido discutido en una serie de importantes artículos: Parsons (1969), Hintikka (1969), Thompson (1972). En particular, el problema de la conexión entre la noción de construcción simbólica y la aritmética parece ser de muy difícil solución. Una discusión más reciente acerca de este tópico puede verse en Young (1982) y Ferrarin (1995). En nuestra opinión, parte de las dificultades resultan de no haber sido observado que la noción de construcción simbólica se origina en la de conocimiento o pensamiento simbólico de Leibniz, noción que no resulta simple de compatibilizar con la concepción madura de Kant. Esta cuestión nos parece que tiene consecuencias en la interpretación del Programa de Hilbert, pues, por ejemplo, en Parsons (1998) encontramos una discusión acerca de las relaciones entre conocimiento intuitivo y finitismo, que para nosotros debería ser entre conocimiento simbólico y finitismo. No ignoramos que en el § 59 de la *Crítica del Juicio,* Kant sostiene que la oposición entre conocimiento intuitivo y simbólico es incorrecta, pues simbólico se contrapone a esquemático como dos tipos de conocimiento intuitivo, mientras que intuitivo se contrapone a discursivo. Pero el problema se encuentra claramente en explicar en que sentido esquemático (construcción ostensiva) y simbólico (construcción *characteristica* o simbólica) son tipos de conocimiento intuitivo. Y eso Kant no lo hace.