

FREGE, EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y LA UNIVERSALIDAD DE LA LÓGICA

Norma B. Goethe

Universidad Nacional de Córdoba

Introducción

En las décadas pasadas se ofrecieron dos enfoques opuestos con respecto a la filosofía de la lógica de Frege. Por una parte, de acuerdo a la interpretación sugerida por la obra de M. Dummett,¹ Frege es el padre de la concepción *semántica* de la lógica clásica habiendo *anticipado* en un sentido importante los desarrollos posteriores que llevaron finalmente a la teoría semántica de Tarski. Desde esta perspectiva algunas de las observaciones de Frege acerca de la noción de verdad y su peculiar carácter podían ser entendidas como expresión de una mera dificultad técnica debida a la falta de una metateoría semántica recién definida formalmente con los trabajos de Tarski.²

Por otra parte, autores como Putnam³ pensaron que Frege había propuesto un *algoritmo* para la lógica deductiva, motivando a Carnap en la búsqueda de un algoritmo similar para una lógica *inductiva*.⁴

A partir de la década de los años ochenta se comenzó a cuestionar ambas sugerencias interpretativas por reflejar una falta de sensibilidad *histórica*. Tales apreciaciones, se argumentó entonces, llevan a encarar el estudio de la filosofía de la lógica de Frege desde las perspectivas lógicas aceptadas en el momento, un hecho que no debería sorprendernos ya que la investigación histórica en torno a la obra de Frege se encontraba entonces apenas en sus inicios. Así, Hans Sluga con su *Gottlob Frege* (1980) invierte radicalmente la estrategia interpretativa de Dummett e inicia la crítica a la lectura "semántica". Sluga argumenta desde un punto de vista *histórico* y a fin de mostrar cuán lejos se hallaba Frege de nuestras preocupaciones contemporáneas muestra la vinculación estrecha de algunas de sus ideas con la *tradicción* filosófica del siglo XIX.⁵ Fue la polémica desatada por esa obra la que hizo ver la necesidad de un estudio más profundo que tuviese en cuenta ambos aspectos en Frege: la tradición a la que pertenece y su *innovación* que finalmente tendría como consecuencia la *ruptura* con esa tradición.⁶

Desde el punto de vista de la lógica es Jean van Heijenoort quien con su im-

portante artículo "Logic as Calculus and Logic as Language" (1967)⁷ indica un camino para el estudio de la nueva lógica de Frege desarrollada en *Begriffsschrift* (1879). En efecto, aquel artículo será más tarde el punto de partida para el desarrollo de una serie de estudios interpretativos que se oponen a la lectura "semántica" de la lógica fregeana.

Pero los escritos póstumos de Frege que contienen gran cantidad de material fundamental para el estudio del desarrollo de su lógica habían permanecido inaccesibles hasta su publicación (*Nachgelassene Schriften*) en 1969.⁸ Esos escritos contienen fragmentos de diversos períodos, en particular, algunos escritos corresponden al período de la publicación de su *Begriffsschrift*. Su versión inglesa aparece en 1979⁹ y es a partir de ese momento que se intensifica la investigación y el estudio de esta etapa de la historia de la lógica que aún está en marcha.¹⁰

La justificación del conocimiento matemático y las leyes lógicas

La estrategia que vamos a seguir aquí no pretende ser original pues destacar que la lógica propuesta por Frege en su *Begriffsschrift* debe ser vista en el contexto más amplio de su proyecto de fundamentación *lógica* de la aritmética es justamente lo que el mismo Frege hace en el prefacio de esa obra.

En el proceso de búsqueda de la verdad científica el reconocimiento de la verdad pasa generalmente por diversas etapas de suerte tal que podemos preguntarnos acerca del camino y las circunstancias por las que se ha llegado gradualmente a ella. Según Frege esta pregunta depende de cada investigador individual y se opone *claramente* a la pregunta acerca de la justificación o demostración de una verdad. La idea es que esta última pregunta no depende del investigador ni de sus hábitos intelectuales sino que tiene que ver exclusivamente con (el contenido de) la verdad en cuestión y para responder a ella necesitamos un método de demostración que nos permita establecer su verdad *firmemente*, es decir, en forma "estricta" y es así que por lo menos en el caso de las matemáticas podemos distinguir entre el contexto del *descubrimiento* y el contexto de *justificación*.¹¹ Cómo llegamos a nuevas verdades puede ser considerada como una cuestión *psicológica*, pero una explicación histórica o psicológica no puede reemplazar una demostración o prueba *estricta* y es eso justamente lo que le interesa al matemático que como Frege está *preocupado por las cuestiones de fundamentación*. Sin entrar en los detalles acerca de los motivos de esta preocupación por los fundamentos de las matemáticas común en su tiempo¹² destaquemos solamente que para Frege la demostración más firme o estricta "es obviamente la demostración *puramente lógica* que prescin-

diendo de las particularidades de las cosas se basa exclusivamente en *las leyes sobre las que descansa todo el conocimiento*".¹³ Es esta idea de la *máxima generalidad* de las leyes lógicas y el supuesto fregeano de que "el ámbito de la aritmética abarca todo el ámbito del pensamiento ya sea intuible o no" los que conjuntamente hacen concebible su proyecto de fundamentación de la aritmética. Las leyes lógicas sobre las que descansa todo el conocimiento se expresan en el sistema de *Begriffsschrift* en los axiomas. La pregunta acerca de la justificación última de las leyes lógicas parece no plantearse para Frege por lo menos en este momento de su carrera.

En cuanto a las verdades que requieren justificación Frege distingue entre aquellas que pueden ser *demostradas en términos puramente lógicos* y las que deben ser justificadas recurriendo a los hechos empíricos, pero esta distinción es metodológica ya que se basa exclusivamente en el *método* de demostración propuesto en *Begriffsschrift*¹⁴ que fue diseñado para propósitos científicos específicos. Frege presenta esta obra como una contribución a las ciencias pensando que puede verse como un desarrollo metodológico aunque no contenga "nuevas verdades"¹⁵ y que puede tener aplicación allí donde la *validez* de la demostración está en juego como en el caso de la fundamentación del cálculo diferencial e integral, aunque su objetivo inmediato está bien delimitado y es más modesto:

*La aritmética fue el punto de partida que me llevó a desarrollar mi "Begriffsschrift", intento por lo tanto aplicarla a ella primero buscando una fundamentación de sus teoremas.*¹⁶

Recordemos que es en el contexto de justificación donde se requieren estándares rigurosos para la reconstrucción de los pasos lógicos de un argumento deductivo.¹⁷ En cuanto a una fundamentación lógica de la aritmética, en primer lugar debemos ver cuán lejos se puede llegar por medio de las inferencias lógicas basadas sólo en las leyes más generales del pensamiento.¹⁸

El matemático se apoya a veces en la *evidencia* de algunos pasos sin explicitarlos pero en el proyecto de justificación rigurosa de las verdades matemáticas que concibe Frege tales "saltos" en las cadenas de inferencias no deben aparecer para que nada *intuitivo* pueda introducirse sin ser notado.¹⁹ Las nociones informales como "evidencia" e "intuición" son nociones *psicológicas* o precientíficas que deben desaparecer de una prueba estricta de acuerdo a los cánones prescritos en *Begriffsschrift*.²⁰ Finalmente, Frege concluye que la *invención* de su "Begriffsschrift" que está basada en la extensión de la teoría matemática de funciones a la lógica desarrolló la lógica. Puesto que al "liberarla" de las limitaciones impuestas por la

gramática del lenguaje ordinario por la que la lógica tradicional se había guiado exclusivamente hasta ese momento contribuyó a su progreso en forma decisiva.²¹

La lógica como escritura conceptual ("*Begriffsschrift*") y el sistema de *Begriffsschrift*

La lógica desarrollada por Frege es un lenguaje y no un mero cálculo abstracto que requiera interpretación – literalmente una "escritura conceptual" o "*Begriffsschrift*" que pretende ser un "lenguaje de fórmulas del pensamiento puro concebido de acuerdo a la aritmética"²² –y que excluyendo todo lo que no tenga relevancia para la inferencia lógica pretende captar sólo el "contenido conceptual".²³ A pesar de que estamos parafraseando aquí las palabras de Frege la lectura de estas líneas está lejos de ser obvia y dado que la concepción de la lógica de Frege que podamos desarrollar dependerá finalmente de nuestra comprensión de aquellos aspectos relacionados con su notación, un estudio más detenido debería incluir aparte del lenguaje y sistema de *Begriffsschrift*, sus *Grundgesetze der Arithmetik*, publicaciones posteriores donde Frege desarrolla su anunciado programa de derivación lógica de los teoremas de la aritmética haciendo uso de su nueva lógica y del sistema axiomático de *Begriffsschrift*.²⁴

A fin de ver la originalidad de la imagen fregeana de la lógica consideremos la respuesta de Frege a una crítica a su *Begriffsschrift*. En "Ueber den Zweck der *Begriffsschrift*" (1883)²⁵ Frege responde a Schroeder y compara su "*Begriffsschrift*" con el cálculo algebraico de Boole destacando que en oposición a este último su lógica no es un mero *calculus ratiocinator* sino un auténtico lenguaje o *lingua characterica*. Según J. van Heijenoort es esencial entender esta oposición entre *calculus* y *lingua* para comprender un capítulo importante de la historia de la lógica pues en ella podemos discernir dos aspectos que conllevan a la idea de la *universalidad* de la lógica que guiaría la obra de Frege.²⁶

En la sección anterior hemos hecho referencia a la concepción fregeana de la *máxima generalidad de las leyes lógicas*. En el sistema de *Begriffsschrift* esta última idea se refleja a su vez en la universalidad del lenguaje ("*Begriffsschrift*") que está dada a través de dos aspectos. Por una parte, la universalidad es la *generalidad* que la teoría cuantificacional desarrollada por Frege posee en su vocabulario y que no puede ser captada por el mero cálculo proposicional. Por otra parte, la universalidad se expresa en un aspecto particular de su "*Begriffsschrift*": su universo del discurso es el universo que está fijo y consiste en todo lo que hay (objetos y funciones) y los cuantificadores que ligán las variables individuales recorren todos los

objetos. De esto se sigue por ejemplo que todas las funciones deben ser definidas para todos los objetos.

Pero la consecuencia más importante de este modo de construir el lenguaje parecería ser que *nada puede ser expresado fuera del lenguaje de Begriffsschrift*. El lenguaje de Frege, su "Begriffsschrift" o *lingua characterica*, debería entenderse entonces como un lenguaje *universal* en el que se expresan todos los contenidos que son *expresables* excluyendo una metaperspectiva sobre o más allá de "Begriffsschrift". De acuerdo a esta lectura que acentúa el vínculo con el *Tractatus* de Wittgenstein ésta es la imagen de la lógica que guía a Frege: la idea de una perspectiva *semántica* en el sentido de un metalenguaje o una jerarquía de lenguajes habría sido *inconcebible* para Frege.²⁷ Pero está claro que esta narrativa acerca de la ausencia de una perspectiva semántica sistemática de "Begriffsschrift" no logra eliminar la ambigüedad de las expresiones "nada puede ser expresado fuera del lenguaje" y es *inconcebible* para Frege" y bien podría ser que estemos haciendo "de la necesidad una virtud" al atribuirle a Frege una concepción filosófica que no es otra cosa que el producto de sus propios límites conceptuales.

Pero esta lectura tiene otro problema y es que resulta difícil ver en qué consiste el *contenido* del "lenguaje *conceptual*" de Frege. Por una parte, "Begriffsschrift" es un lenguaje de fórmulas porque así como en la aritmética también en él se emplean "letras" o variables, pero *no* es un lenguaje *formal* que tenga que ser interpretado, sino que pretende ser un "verdadero lenguaje" que se aprende como cualquier lenguaje, esto es, por medio de "indicaciones" o "gestos". Las elucidaciones informales acerca de los signos de "Begriffsschrift" donde aparecen algunos términos semánticos como "referir" deben verse como "instrucciones" para aprender el uso de "Begriffsschrift". Las reglas formales que *no* se expresan en el sistema pueden verse como "reglas para el uso de nuestros signos"²⁸. Pero si Frege ve la ventaja de un sistema *formal* "en esta manipulación de signos de los que se ha extraído toda lógica argumentativa",²⁹ ¿en qué se diferenciaría entonces su posición del formalismo de Hilbert? Esta es otra pregunta digna de estudio, sobre todo dado que fue Frege y no Hilbert quien cuenta entre sus logros haber presentado por primera vez con toda precisión la fundamental noción de *sistema formal*.³⁰

Nuestra comprensión del lenguaje de "Begriffsschrift" se *manifiesta* en el uso, a través de la *construcción de pruebas estrictas*, es decir, de cadenas deductivas "sin saltos". A esta idea de "Begriffsschrift" como *lingua* podemos unir una concepción de la racionalidad, pues lo que es "objetivo" se *manifiesta* en la práctica, esto es, en la aceptación de pruebas o demostraciones "sin saltos". Los criterios de objetividad o *aceptación justificada* están dados en última instancia por los axiomas y la aplicación de las reglas de inferencia del sistema de *Begriffsschrift*. Los axiomas del

sistema expresan las leyes lógicas, las "leyes sobre las que descansa *todo el conocimiento*" y esto nos lleva a una última pregunta pues finalmente cabe preguntarse acerca de la justificación de las leyes lógicas ¿o no? Si recordamos aquí lo que Scheffer en su comentario de los *Principia* de Russell llamara en su momento el "predicamento logocentrista" la respuesta es obvia, pero no para todos.³¹

Referencias bibliográficas

- Burge, T. (1998), "Frege on Knowing the Foundations", *Mind* 107.
- Coffa, A. (1982), "Kant, Bolzano and the Emergence of Logicism", *The Journal of Philosophy*.
- Demopoulus, W. (comp.) (1995), *Frege's Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Harvard University Press.
- Dummett, M. (1971), *Frege's Philosophy of Language*, Londres: Duckworth [segunda edición de Cambridge: Harvard University Press, 1981].
- _____ (1981), *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Cambridge.
- _____ (1991), *Frege's Philosophy of Mathematics*, Cambridge.
- Frege, G., (1969), *Nachgelassene Schriften*, Hamburg: Felix Meiner Verlag.
- _____ (1964), *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, Hildesheim Press (en prensa)
- _____ (1979), *Posthumous Writings*, Oxford: Oxford University Press.
- Goethe, N.B. (1987), "The Kantian Roots of Frege's Thought", *8th International Conference for Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Moscow.
- _____ (2000), "Frege's arguments against Kant's notion of pure intuition and the principles of logic", *ASL European Meeting*, Paris.
- _____ (2000), "Kant y Frege: Tradición e Innovación", *Academia Nacional de Ciencias*, Buenos Aires.
- Goldfarb, W. (2000), "Frege's Conception of Logic", *Future Past*, Oxford.
- Heck, Richard (1998), "Grundgesetze der Arithmetik I", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 38, 29-32.
- _____ (1999), "Grundgesetze der Arithmetik I", *Philosophia Mathematica* 10.
- _____ "Frege and Semantics", *The Cambridge Companion to Frege*, Cambridge University.
- Putnam, H. (1983), *Realism and Reason, Philosophical Papers, vol. III*, Cambridge: Cambridge University Press.
- _____ (1994), "Rethinking mathematical necessity", en *Words and Life*, Cambridge: Harvard University Press.
- Ricketts, T. (1986), "Generality, Sense and Meaning in Frege", *Pacific Philosophical Quarterly*.
- Stanley, J. (1996), "Truth and Metatheory in Frege", *Pacific Philosophical Quarterly*.
- Tappenden, J. (1997), "Metatheory and Mathematical Practice", *Philosophical Topics* 25.
- Van Heijenoort, J. (1967), "Logic as Calculus and Logic as Language", *Synthese* 17.

Notas

¹ La interpretación de M. Dummett se desarrolla principalmente en tres publicaciones: *Frege's Philosophy of Language*, *The Interpretation of Frege's Philosophy* y *Frege's Philosophy of Mathematics*. Cabe destacar que Dummett responde a las críticas más importantes recibidas a la primera publicación (1971) y sigue siendo a pesar de las polémicas suscitadas por su interpretación el conocedor más importante de la obra de Frege. Para una evaluación del impacto de su obra sobre los especialistas de Frege más recientes, véase Demopoulus (1995).

- ² Por ejemplo, en su artículo "Der Gedanke" (1918/19) Frege establece que la noción de verdad no es definible (el término que emplea es "undefinierbar"). Algunos comentaristas percibiendo el parentesco con el *Tractatus* de Wittgenstein vislumbraron en estas observaciones de Frege una propuesta de interpretación de la verdad como algo *inefable*. Por otra parte, B. Russell con sus afirmaciones sobre el *Tractatus* contribuyó indirectamente a la idea de que la concepción fregeana de la lógica (así como la del *Tractatus*) se veía limitada en un sentido importante por carecer de una perspectiva metalingüística.
- ³ Putnam (1983).
- ⁴ Las observaciones de Putnam (véase, nota 3) son de interés porque caracterizan una posición común hasta ese momento, posición que refleja la escasa apreciación y conocimiento de la concepción de la lógica de Frege debido en gran parte al estado incipiente de la investigación histórica con respecto a esa etapa reciente del desarrollo de la *nueva* lógica matemática. Para muchos el conocimiento de la contribución de Frege a la lógica y su impacto filosófico permanecía enmarcado en las referencias contenidas en algunas de las obras de Carnap y Wittgenstein, dos pensadores diametralmente opuestos en cuanto a sus interés y metodología filosóficos. Más tarde, Putnam mismo refleja el cambio de perspectiva hecho posible por el enriquecimiento historiográfico de la última década. Véase, por ejemplo su "Rethinking mathematical necessity", en *Words and Life*.
- ⁵ Sluga lo asocia con Lotze quien había sido profesor de filosofía en Jena en el momento en que Frege realizaba sus estudios en esa universidad y su posición filosófica lo vinculaba al idealismo trascendental alemán.
- ⁶ Véase, Goethe (2000).
- ⁷ Van Heijenoort (1967).
- ⁸ Frege (1969).
- ⁹ Frege (1979).
- ¹⁰ Para estudios recientes de algunos aspectos de *Grundgesetze* relevantes a la interpretación semántica, véase Heck (1998, 1999).
- ¹¹ Si bien Frege distingue entre el contexto de descubrimiento y el de justificación en cuanto al conocimiento científico en general, lo que efectivamente tiene para decir respecto de la aplicación de esta distinción concierne sólo a las matemáticas y a las verdades lógicas. Por otra parte, no es obvio que esa distinción coincida con su uso contemporáneo en filosofía de la ciencia.
- ¹² Para una sugerencia interpretativa respecto a la preocupación por la fundamentación de las matemáticas en ese período, véase Coffa (1982).
- ¹³ Frege, *Begriffsschrift*, p. IV (la traducción del original al castellano es mía, las cursivas no están en el original).
- ¹⁴ *Begriffsschrift*: "Lo que está a la base de esta distinción no es la cuestión del origen psicológico sino el más perfecto método de demostración". Entre las verdades que *no* requieren demostración Frege considera los principios o leyes lógicas (los axiomas del sistema de *Begriffsschrift*).
- ¹⁵ En ese contexto Frege nos recuerda que todos los grandes progresos científicos de la modernidad se originaron precisamente en una innovación y desarrollo metodológico (*Begriffsschrift*, p. V).
- ¹⁶ *Begriffsschrift*. Este proyecto lo llevará a las consideraciones filosóficas de *Die Grundlagen der Arithmetik* y finalmente a sus *Grundgesetze der Arithmetik I, II* donde se propone desarrollar su programa de fundamentación empleando el sistema axiomático de *Begriffsschrift*.
- ¹⁷ En cuanto a la justificación basada en "hechos empíricos" Frege no ofrece ningún punto de vista y está claro que la noción misma de "justificación" que propone proviene de la filosofía de las matemáticas.
- ¹⁸ El camino seguido por Frege en su proyecto de fundamentación consiste en reducir las nociones aritméticas (de orden y número) a nociones lógicas pasando por diversas etapas de las cuales la publicación de su *Begriffsschrift* en 1879 marca el comienzo.

- ¹⁹ Para una consideración de los argumentos de Frege contra el recurso a la noción de intuición en el conocimiento matemático, véase Goethe (2000).
- ²⁰ Para cumplir con este requisito el lenguaje ordinario sería inadecuado obstaculizando la tarea y es a partir de esta dificultad que surge la idea de su "Begriffsschrift". Para Frege su uso está claro pues su "lenguaje de fórmulas del pensamiento puro" que excluye todo lo que no tenga relevancia para la inferencia lógica sirve para "testear la validez de las cadenas de inferencias y revelar cada una de las *presuposiciones* a fin de investigar sus fundamentos últimos". Véase Frege, *Begriffsschrift*, p. V.
- ²¹ De ahí la expresión "lógica matemática" que designa la *nueva* lógica que conocemos principalmente a partir de la obra de Frege.
- ²² Tal es el subtítulo de su *Begriffsschrift, eine der Arithmetik nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens*.
- ²³ Véase *Begriffsschrift*, p. IV. Distinguimos aquí entre el lenguaje "conceptual" o "Begriffsschrift" y el sistema axiomático de *Begriffsschrift*, distinción que no aparece explícita en Frege.
- ²⁴ Para referencias sobre estudios recientes, véase las notas 1, 10 y 30.
- ²⁵ Reimpreso en Frege, G., *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. La reseña de Schroeder se publicó en *Zeitschrift fuer Mathematik und Physik* 25 (1880), p. 81-94.
- ²⁶ Van Heijenoort (1967), p. 324.
- ²⁷ Van Heijenoort (1967), p. 326. De acuerdo a van Heijenoort "Frege never raises any *metasystematic* questions". Es decir, Frege nunca se habría planteado preguntas acerca de su sistema como la consistencia, completud e independencia de los axiomas.
- ²⁸ Véase Frege (1964), p. 13.
- ²⁹ Van Heijenoort, op. cit., p. 327.
- ³⁰ En efecto, en algunos fragmentos del período en torno a la publicación de *Begriffsschrift* (1879) Frege habla del carácter "formal" de la lógica y expresa un punto de vista cercano al de Kant en su *Logik* (1800). Según Kant los principios lógicos son las *condiciones formales* del pensamiento caracterizándose por su *máxima generalidad* y su carácter *normativo*. Véase, Goethe (1987).
- ³¹ Para una interpretación cercana a la de V. Heijenoort, véase Ricketts (1986) y Goldfarb (2000). Heck "Frege and Semantics", *The Cambridge Companion to Frege*, Cambridge University Press (en prensa); Stanley (1996), Tappenden (1997). Para un estudio acerca de la concepción axiomática de Frege, véase Burge (1998).