

La regla de reducción al absurdo en la Geometría griega y en la Lógica de Aristóteles*.

Jorge Alberto Molina[†]
UNICAMP – UNISC – UERGS

La regla de inferencia conocida como regla de reducción al absurdo (*reductio ad absurdum*) o prueba indirecta, era una herramienta indispensable para la Geometría griega. Contemporáneamente representamos la *reductio* así:

$$\begin{array}{c} \neg p \\ \cdot \\ \cdot \\ \Lambda \\ \hline p \end{array}$$

Si queremos probar una tesis p , suponemos su negación $\neg p$ verdadera, si de esta suposición inferimos una proposición absurda Λ , entonces estamos autorizados para afirmar que p es verdadera. De ese modo se encuentra representada la *reductio* en Prawitz (1965).

En lo que sigue usaremos las expresiones *reductio* o regla de reducción al absurdo como sinónimas. Llamaremos prueba indirecta o prueba por el absurdo a aquella prueba que usa la regla de reducción al absurdo. Llamaremos prueba directa a aquella que no usa la *reductio*.

Ni en la Geometría ni en la Filosofía de los griegos aparece la regla de reducción al absurdo distinguida de otra regla diferente que hoy llamamos regla de introducción de la negación, cuyo esquema es:

* Agradezco al fondo FAP de la UNISC por la ayuda financiera para la realización de esta investigación. Agradezco las sugerencias y correcciones dadas por el revisor de este trabajo.

[†] molina@unisc.br

que si los axiomas son verdaderos el teorema es verdadero, o que ambos axiomas y teoremas son falsos.

Un segundo caso es cuando Λ es una proposición explícitamente absurda. En los *Primeros Analíticos* I,23 41 a 26, Aristóteles se refiere al uso de la *reductio* en la prueba de la inconmensurabilidad entre la diagonal AC y cualquiera de los lados del cuadrado ABCD. Se prueba que, si se admite que la diagonal AC y el lado AB, por ejemplo, tengan una medida común, entonces debería admitirse como consecuencia que un número puede ser par e impar al mismo tiempo.

Un tercer caso son los absurdos nocionales menos precisos que surgen al razonar sobre términos cuyo significado no es determinado por una base de axiomas o por definiciones precisas como por ejemplo los términos movimiento y reposo. Las aporías de Zenon son un ejemplo de esta situación.

Los geómetras griegos usaban la reducción al absurdo con tres objetivos: a) Demostrar que un objeto dado posee una propiedad determinada; b) probar la existencia de un objeto determinado; c) como parte del método de exhaustión. Un ejemplo del primer tipo de uso, lo encontramos en los *Elementos* de Euclides, donde aparece por primera vez usada la regla de reducción al absurdo en la demostración de la proposición 6 del libro I, mencionada arriba. Esa proposición es la recíproca de la proposición 5 del mismo libro I, que es demostrada por Euclides directamente.

Un ejemplo del segundo tipo de uso lo encontramos en las proposiciones 31 del libro VII y 20 del libro IX. En la primera proposición Euclides demuestra que cualquier número dado compuesto tiene un divisor primo. Suponer que ese número no tenga divisores primos implicará afirmar la existencia de una sucesión infinita de divisores de ese número, lo cual es absurdo. En la segunda proposición Euclides demuestra que dada una lista de números primos p_1, p_2, \dots, p_n siempre podemos encontrar un número primo que no está dentro de esa lista. Basta considerar el mínimo común múltiplo de los p_1, p_2, \dots, p_n y sumarle 1. Ese número que podemos llamar q es primo. Si no fuese primo, entonces es compuesto y debe ser dividido por un número primo. Si sus divisores primos estuvieran en la lista p_1, p_2, \dots, p_n , llegaríamos al absurdo de que la unidad sería divisible. Luego debe haber por lo menos un número primo fuera de esa lista. Aquí en este caso tenemos un caso de aplicación del principio del tercero excluido que es lógicamente equivalente a la *reductio*.³

Es claro, que en el párrafo anterior presentamos una reconstrucción de la pruebas de Euclides, presentadas dentro de un modo de expresión moderno. Los griegos no tenían un concepto abstracto de número. Para ellos, número era número de alguna cosa, esto es una medida, sea de la longitud de un segmento, o de un

³ Ver Prawitz (1965), pág 21

área o de un volumen. Así los libros aritméticos de los *Elementos* de Euclides representan los números por medio de segmentos.

El tercer tipo de uso de la *reductio* se manifestaba en el método de exhaución. Como los griegos consideraban al infinito como *apeiron* (lo indeterminado e irracional) necesitaban un método para abordar problemas que envuelven implícitamente cantidades infinitamente pequeñas, sin tener que admitir explícitamente su existencia. El método de exhaución venía a hacer en la Geometría griega el papel que más tarde, a partir de la Edad Moderna, harían los métodos infinitesimales. Este método fue reiteradamente usado en los trabajos de Arquímedes, y servía, principalmente, para estudiar relaciones entre áreas de figuras curvilíneas. El método de exhaución terminaba con una aplicación doble de la regla de reducción al absurdo.

La proposición 2 del libro XII de los *Elementos* de Euclides nos da un ejemplo de la aplicación del método de exhaución. En esa proposición se trata de probar que el área de dos círculos está en la misma razón que el cuadrado de sus diámetros. “Estar en la misma razón” es definida por Euclides en *Elementos* V, Def 3 de la siguiente forma: Dadas cuatro magnitudes a,b,c,d la razón entre la primera y la segunda es la misma que la relación entre la tercera y la cuarta, cuando, si tomamos cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera (ma,mc) y cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta (nb, nd) tenemos que ma es igual, mayor o menor que mc si y solamente si nb es igual, mayor o menor que nd respectivamente. Esta definición es el núcleo de la teoría de las proporciones de Eudoxo y sirvió para que los griegos pudiesen trabajar con magnitudes incommensurables (por ejemplo, el lado del cuadrado y su diagonal) El método de exhaución se apoya en la siguiente proposición (*Elementos* X, 1) conocida como lema de Arquímedes: Dadas dos magnitudes, si de la mayor se sustrae una magnitud mas grande que su mitad, y de lo que queda se sustrae una magnitud mayor que la mitad, y si el proceso es aplicado de forma continua, entonces lo que resta será una magnitud que es menor que la menor de las magnitudes dada al comienzo.

Como ejemplo de aplicación del método de exhaución consideremos la demostración dada por Euclides en *Elementos* XII,2. En esa proposición se trata de demostrar que la razón del círculo ABCD al círculo EFGH es la misma que la razón del área del cuadrado sobre BD al área del cuadrado sobre FH. Esto es, se trata de demostrar que vale la siguiente proporción:

$$\frac{\text{Círculo ABCD}}{\text{Círculo EFGH}} = \frac{\text{Área } (\square \text{ BD})}{\text{Área } (\square \text{ FH})}$$

Vale la pena analizar la demostración de esta proposición de Euclides, porque constituye un paradigma de la aplicación del método de exhaución en la Geometría griega. La prueba de ella contiene una doble reducción al absurdo. Supóngase que

$$\frac{\text{Círculo ABCD}}{\text{Círculo EFGH}} \neq \frac{\text{Área}(\square BD)}{\text{Área}(\square FH)}$$

Debe existir un área S tal que

$$\frac{\text{Círculo ABCD}}{S} = \frac{\text{Área}(\square BD)}{\text{Área}(\square FH)}$$

Si $S \neq \text{Círculo EFGH}$ tenemos dos posibilidades : $S < \text{Círculo EFGH}$ o $S > \text{Círculo EFGH}$. Suponiendo que $S < \text{Círculo EFGH}$ llegamos a probar la proposición absurda Λ que afirma que el área de un polígono inscrito en un círculo es mayor que el área de ese círculo. Tendremos entonces la situación siguiente:

$S < \text{Círculo EFGH}$

·
·
·
·

Λ

Euclides demuestra que la segunda posibilidad, esto es, cuando suponemos que $S > \text{Círculo EFGH}$ se reduce a la primera. Así tenderemos que de la suposición de que $S \neq \text{Círculo EFGH}$ llegamos a un absurdo. Luego $S = \text{Círculo EFGH}$. Podemos representar la prueba dada por Euclides así:

$S \neq \text{Círculo EFGH}$

.

.

Λ

$S = \text{Círculo EFGH}$

La proposición 2 del libro XII de los *Elementos* es un ejemplo de cómo los griegos expresaban relaciones entre áreas curvilíneas en función de relaciones entre áreas rectilíneas. Esta era la forma que tenían los griegos para tratar con áreas de figuras curvilíneas, No tenían los instrumentos del cálculo infinitesimal para expresar directamente esas áreas. Su rechazo al infinito, sus altos padrones lógicos impidieron que llegaran a desarrollar esa herramienta.

En el caso de hallar el área A de un segmento parabólico QRPrq (Figura 1), los griegos procedían del modo siguiente. Podemos “agotar” el área de QRPrq de la siguiente forma: Trazemos el triángulo QPq cuyo vértice es P el punto medio del arco parabólico QRPrq. Restamos del área del segmento parabólico QRPrq el triángulo Qpq. Quedan determinados dos

segmentos parabólicos menores, uno de ellos el segmento parabólico determinado por el arco PRQ y la recta PQ, el otro el segmento parabólico determinado por el arco Prq y la recta Pq. Del primer segmento parabólico restamos el triángulo QRP, donde R es el punto medio del arco parabólico QP. Análogamente restamos del segundo segmento parabólico el triángulo Prq donde r es el punto medio del arco parabólico Prq. Continuando el proceso, llegaremos a tener segmentos parabólicos, tal que la suma de sus áreas es menor que el área B de un cuadrado dado. Por otro lado el proceso genera un polígono cuya área casi coincide con el área del segmento parabólico. Ahí que es lo que hacían los

Arquímedes inovó este método de la siguiente manera : además de usar polígonos inscriptos usó polígonos circunscriptos. De esa forma generaba áreas poligonales A_1, A_2, A_3, \dots mayores que un área curvilínea C que a su vez es mayor que áreas de polígonos inscritos B_1, B_2, B_3, \dots que van agotando C . Observaba que las áreas circunscriptas y las áreas inscriptas se aproximan a un valor A . Arquímedes hacía entonces concluir el método de exhaustión por una doble *reductio*: suponía que $A < C$ y llegaba a una contradicción; suponía que $A > C$ y también llegaba a una contradicción. Luego concluía que $A=C$. Con esse método Arquímedes pudo establecer relaciones entre el volumen de un cono y el volumen del cilindro cuya base es ese cono.

El método de exhaustión, completado por la doble *reductio* tuvo un prestigio tan grande que todavía podemos encontrar su uso en trabajos de matemáticos de la Edad Moderna. En el siglo XVII Torricelli prueba un resultado sorprendente: encuentra una figura infinita cuyo volumen es igual al volumen de un cilindro finito. Torricelli da dos pruebas: una usando el método de los indivisibles, la otra al estilo de los antiguos, terminando su prueba usando dos veces la *reductio*.⁴

Hay evidencias numerosas de que la *reductio* era usada por los geómetras griegos anteriores a Euclides. Como vimos en los *Primeros Analíticos* I, 23 41 a 26, Aristóteles se refiere al uso de la *reductio* en la prueba de la incomensurabilidad entre la diagonal AC y cualquiera de los lados del cuadrado $ABCD$. Parece que esta fue la prueba ofrecida por los pitagóricos para demostrar la existencia de cantidades incommensurables entre sí. Esta cita de Aristóteles muestra que la *reductio* era un tipo de argumento ya usado en los tiempos anteriores a Euclides. Aquí, sin embargo, debemos hacer un comentario. La prueba ofrecida por Aristóteles puede formalizarse así:

$$\begin{array}{c} P \\ \cdot \\ \cdot \\ \Lambda \\ \hline \Gamma P \end{array}$$

⁴ Mancosu (1998) págs 130-136

p es la proposición " el lado del cuadrado y su diagonal son conmensurables". Aquí a partir de p inferimos una proposición absurda Λ y entonces, podemos concluir $\neg p$, la negación de p . En el sistema de deducción natural NJ de Gentzen este esquema corresponde a la regla de introducción de la negación, que es diferente de la *reductio* propiamente dicha. Tendríamos aquí una confusión por parte de los griegos entre dos reglas de inferencia que hoy nosotros consideramos diferentes. La regla de introducción de la negación es aceptable desde un punto de vista intuicionista, mientras que la *reductio* propiamente dicha no. La razón por la cual los griegos no distinguieron entre estas dos reglas es que ellos, diferentemente de nosotros, consideraban la *reductio* a partir de una situación de diálogo. El proponente P de una tesis p sometía esta a discusión. El oponente O niega p . A partir de ahí, el proponente conduce la discusión hasta obligar a O a afirmar un absurdo. P ha ganado la discusión y p debe ser aceptada. Con este esquema podemos reconstruir la prueba de la inconmensurabilidad del lado del cuadrado con su diagonal así: el proponente afirma la inconmensurabilidad del lado del cuadrado con su diagonal. El oponente afirma que ambos segmentos son conmensurables. El oponente es llevado a admitir el absurdo de que un número puede ser par e impar al mismo tiempo. La tesis de la inconmensurabilidad de ambos segmentos ha quedado probada.

Aristóteles en los *Primeros Analíticos* I,7 y I, 5 emplea la *reductio* como un principio metalógico destinado a "reducir" todos los silogismos válidos a los silogismos universales válidos de la primera figura **Barbara** y **Celarent** cuyas formas son las siguientes:

Todo P es Π	Ningún P es Π
Todo Σ es P	Todo Σ es P
-----	-----
Todo Σ es Π	Ningún Σ es Π

Colocamos "reducir" entre comillas, porque la reducción aristotélica es algo diferente de la reducción en la moderna teoría de la demostración aunque no enteramente diferente⁵. Aquí también en la reducción aristotélica tenemos en parte

⁵ Para el concepto de reducción en la moderna Teoría de la Demostración ver Prawitz 1965

un nivel de operación puramente sintáctico. Mas cuando entra en juego la *reductio ad absurdum* ya tenemos un nivel semántico, pues tenemos que hablar de verdad y falsedad. Esto ya era conocido por Aristóteles quien al contraponer las pruebas directas con las pruebas indirectas (por el absurdo) afirma que en la prueba directa no es necesario que la conclusión sea conocida, ni que se presuponga que ella sea verdadera o no, en tanto que en la prueba por el absurdo se debe presuponer que la conclusión no es verdadera (*Primeros Analíticos* II, 14). Para conseguir entonces “reducir” todos los silogismos válidos a silogismos válidos de la primera figura Aristóteles usa la *reductio* y la regla de conversión. La regla de conversión ella sí opera en un nivel enteramente sintáctico.

De Ningún A es B	por conversión obtenemos	Ningún B es A
De Algún B es A	por conversión obtenemos	Algún A es B
De Todo B es A	por conversión obtenemos	Algún A es B

Las dos primeras reglas de conversión son simétricas, de lo que está a la izquierda obtenemos lo que está a la derecha y recíprocamente. Ya la última llamada de conversión accidental sólo nos permite obtener el enunciado de la derecha suponiendo verdadero el enunciado de la izquierda, pero no recíprocamente. Podemos caracterizar el objetivo de Aristóteles en los *Primeros Analíticos* I, 4- I, 8 del modo siguiente: mostrar que existe una forma canónica de silogismo válido **Barbara** y dos tipos de reglas básicas en el sistema de la silogística, las reglas de conversión y la de permutación de premisas. En la realización de esta tarea juega un papel central, en un nivel metalógico, la regla de reducción al absurdo. Aristóteles procede realizando los siguientes pasos.

Primer paso: Probar la validez de todas las formas de silogismo válidas “reduciéndolas” a las cuatro formas válidas de la primera figura (**Barbara**, **Celarent**, **Darii** y **Ferio**). En esta tarea se usa conversión y *reductio*. Cuando Aristóteles usa sólo conversión, se trata de una reducción en el sentido de lo que hoy conocemos como reducción en la teoría de la demostración, pues se opera sintácticamente sobre los símbolos. Ahora cuando Aristóteles usa *reductio*, sustituye la negación de la conclusión deseada por una de las premisas, obteniendo así un nuevo silogismo con dos premisas, opera sobre él por conversión, cuando es necesario, hasta obtener de esta forma una de las cuatro formas válidas de la primera figura, llegando así a una conclusión que es la contraria o la contradictoria de la premisa del argumento original que fue sustituida. Esto prueba la conclusión originalmente deseada.

Ejemplo: Reducción de **Cesare** (2da Figura)

Ningún N es M Todo S es M	∇	Ningún M es N Todo S es M	(conversión)
Ningún S es N		Ningún S es N	(∇ símbolo que indica reducción)

Tenemos en este caso una reducción de **Cesare** a **Celarent**. Aquí no precisamos de *reductio*. Es necesario sólo usar la regla de conversión.

De la misma forma reducimos **Camestres** (2da Figura) a **Celarent**, usando la permutación de premisas y la regla de conversión.

Pero en el caso de Baroco (2da Figura) la reducción sólo puede ser hecha usando *reductio*

Todo N es M	∇	Todo X es N (negación de la conclusión deseada)
Algún X no es M		Todo N es M
Algún X no es N		Todo X es M

Llegamos a un silogismo en **Barbara** cuya conclusión " Todo X es M " contradice la premisa "Algún X no es M". Negar la conclusión deseada "Algún X no es N" nos lleva a un absurdo, afirmar al mismo tiempo " Algún X no es M" y " Todo X es M". Luego debemos afirmar " Algún X no es N".

Segundo paso: Reducción de los silogismos válidos de la primera figura **Darii** e **Ferio** usando *reductio ad absurdum*

Reducción de **Ferio**

Ningún B es A	∇	Todo G es A (negación de la conclusión deseada)
Algún G es B		Ningún B es A
Algún G no es A		Ningún G es B

Permutando las premisas del segundo silogismo tenemos

Ningún B es A

Todo G es A

Ningún G es B

Esta forma **Cesare** se reduce, como ya vimos, a **Celarent**, y su conclusión niega la segunda de las premisas del silogismo original. Reducimos así **Ferio** a **Cesare** que por su lado se reduce a **Celarent**

Darii se reduce a **Camestres** también usando *reductio*

Todo B es A	Ningún G es A	Todo B es A
Algún G es B	Todo B es A	Ningún G es A
_____	∇	_____
Algún G no es A	Ningún G es B	Ningún G es B

Pero **Camestres** se reduce, como ya vimos sin usar *reductio*, a **Celarent**

Tercer paso: La *reductio ad absurdum* presupone **Celarent**, pues una de sus premisas, dice Aristóteles, se obtiene por **Celarent**. Esto es afirmado en los *Segundos Analíticos* I, 26 en un texto bastante difícil. En los *Segundos Analíticos* I, 26, Aristóteles argumenta en favor de la superioridad de la demostración directa sobre la demostración por el absurdo. Debemos recordar que Aristóteles ya afirma en los *Primeros Analíticos* que todo lo que puede ser probado por medio de una prueba directa puede también ser probado por medio de una prueba que use *reductio*, y que lo que puede ser probado por el absurdo puede ser probado directamente, sin cambiar los términos que aparecen en la prueba (*Primeros Analíticos II*, 14) Debemos suponer que aquí Aristóteles en este texto, se restringía al ámbito de la silogística: esto es Aristóteles estaría afirmando que si la validez de una forma de silogismo se puede probar usando *reductio*, entonces también se puede probar sin usar *reductio*. No presenta una justificación de esa afirmación. Volviendo a *Segundos Analíticos* I, 26, Aristóteles dice ahí que la

Ningún B es A

Afirmamos la contraria (Todo B es A) de la proposición que queremos demostrar (Ningún B es A), y como ya admitimos que " Todo G es B" concluimos " Todo G es A", que es la contraria del enunciado " Ningún G es A", que ya también aceptamos como verdadero. Obsérvese que como premisa del nuevo argumento colocamos la contraria de la proposición que deseamos demostrar. Obtenemos la conclusión "Todo G es A" que es un enunciado contrario a la conclusión del silogismo cuya forma es **Celarent**. Dice Aristóteles: "cuando es la conclusión que A no se predica de G (Ningún G es A) la que es más conocida, usamos la demostración por el absurdo; cuando por el contrario, es la premisa del silogismo (Ningún B es A), tenemos que usar una demostración directa. Pero en el orden natural, la proposición que dice que A no pertenece a B (Ningún B es A) es anterior a aquella proposición que afirma que A no pertenece a G (Ningún G es A), puesto que las premisas a partir de las cuales se obtiene una conclusión son anteriores a la conclusión misma, y que A no pertenece a G es la conclusión y A no pertenece a B es una de las premisas de donde se obtiene una conclusión". Y concluye "Si en consecuencia la demostración que procede de premisas mejor conocidas y anteriores es superior, y aunque las dos demostraciones (la negativa y la reducción al absurdo) engendran una y otra convicción partiendo de alguna cosa que no es, si sin embargo, el punto de partida de una es anterior al punto de partida de otra, resulta que la demostración negativa tendrá una superioridad absoluta sobre la reducción a lo imposible." (*Segundos Analíticos* I, 26) Así la demostración negativa cuya forma es **Celarent** es más científica que la demostración por *reductio*.

Cuarto paso: Observamos que una de las premisas de **Celarent** se obtiene por **Barbara**. De este modo **Barbara** tiene preminencia sobre **Celarent**. Así la tarea "reducción" de todas las formas de silogismo válidas a **Barbara** queda completada.

También, en los *Primeros Analíticos* en I 25, la *reductio* es usada para demostrar la validez de ciertos silogismos modales, como por ejemplo, el silogismo en **Barbara**, cuya premisa mayor es contingente y la menor asertórica. En *Primeros Analíticos* I, 23 Aristóteles también usa la *reductio* para demostrar la validez de ciertas formas del silogismo hipotético.

Aristóteles distinguió claramente entre la demostración científica por un lado y la argumentación dialéctica y retórica por el otro. De la demostración científica se ocupó en los *Segundos Analíticos*, de la argumentación dialéctica en los *Tópicos* y de la argumentación retórica en su tratado sobre la Retórica. La *reductio* fue usada por los griegos frecuentemente en la argumentación filosófica, en el contexto de discusiones metafísicas y éticas. También su empleo fue común en la argumentación retórica. La prueba por el absurdo es un tipo de argumento muy empleado en los diálogos platónicos. Aparentemente, en la Filosofía griega,

encontramos por primera vez usado este tipo de argumento en la escuela eleática. En el *Parménides* 128, Platon, nos presenta las pruebas indirectas con las que Zenon pretendía negar la pluralidad del mundo a partir de la imposibilidad del movimiento. Del punto de vista de la Historia de la Ciencia y de la Filosofía, interesa determinar si fue dentro de la argumentación dialéctica, o por el contrario dentro de la demostración geométrica, que se originó la *reductio*. Esta cuestión no tiene sólo un interés histórico, pues su resolución también permitiría iluminar las relaciones entre Lógica y Matemática. Aquí la investigación histórica podría ser usada en el intento de decidir la cuestión de si la Lógica viene “atrás” de la Matemática, en el sentido de consagrar formas de argumentación que ya son de uso corriente en la práctica matemática, y que se originaron para resolver problemas específicamente matemáticos (como lo pensaba Brouwer y la escuela intuicionista), o si por el contrario, la Lógica tiene un poder prescriptivo sobre la argumentación matemática y justifica los modos de inferencia usados en esta ciencia (como lo pensaba Russell con la escuela logicista).

En varios textos, como en *Menon* 86 e 3, Platon se refiere a la necesidad de imitar el modo de argumentar de los matemáticos, que consiste en suponer hipótesis, y examinar las consecuencias que se siguen de esas hipótesis. Como la *reductio* es un tipo de argumento *ex hypothesis*, de la lectura de esos textos platónicos parecería poder inferirse que la prueba indirecta habría surgido primeramente en el seno de la Geometría griega, probablemente al intentar decidir la cuestión de si existen o no cantidades incomensurables entre si, y que, con posterioridad, fue empleada en la argumentación filosófica. Sin embargo, a través de una cuidadosa investigación histórica Árpád Szabó, en su obra *Anfänge der griechischen Mathematik (Los comienzos de la matemática griega)* intentó demostrar la prioridad de la dialéctica eleática sobre la Matemática griega en el uso de la prueba por reducción al absurdo. Szabó presenta tres argumentos en favor de su tesis sobre la prioridad de la Dialéctica sobre la Geometría en el uso de la *reductio*: a) La *reductio* aparece por primera vez en el poema de Parménides y no tenemos textos matemáticos anteriores a ese poema que muestren el uso de la *reductio*; b) no podemos explicar satisfactoriamente cómo surgió ese tipo de argumento en el seno de la matemática griega empírica anterior a la escuela eleática, por el contrario, podemos explicar el surgimiento en la filosofía de la demostración indirecta a partir de la crítica a la cosmogonía de Anaxímenes (esta afirmación se la toma Szabó de K. Popper) y c) el uso de la demostración indirecta aparece ligado al abandono del empirismo por parte de los matemáticos griegos, y este hecho, es consecuencia de la influencia de la escuela eleática.

Haremos algunas observaciones a estos argumentos. Es difícil poder establecer una cronología precisa, y parece, que cualquier afirmación que hagamos en ese sentido tendrá siempre un carácter conjetural. A diferencia de lo que piensa

Szabó, es bien posible que la *reductio* haya surgido al intentar resolver un problema específicamente matemático, a saber, la existencia de magnitudes inconmensurables. En cualquier caso, para decidir la cuestión de la prioridad deberemos realizar una investigación sobre la teoría de los irracionales. Ya vimos que Aristóteles se refiere a la *reductio* al hacer referencia a la prueba que demuestra la inconmensurabilidad de los lados del cuadrado con la diagonal. Por lo demás, es el propio Szabó quien en la primera parte de su libro sobre los orígenes de la matemática griega hace esa tarea. En esa parte, Szabó argumenta en favor de la hipótesis de que la cuestión de los irracionales tiene un origen preplatónico y que es un problema que se vincula con la teoría de las proporciones pues se relaciona con la cuestión de encontrar una media proporcional entre dos segmentos a y c.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

Todo esto es bastante razonable, mas no tenemos aquí un argumento decisivo para concluir que la *reductio* se originó dentro del campo de la dialéctica y de ahí pasó a ser adoptada por los matemáticos. El abandono del empirismo dentro de la matemática griega es un asunto que debe ser matizado. Szabó como Brunschvig en su libro *Les étapes de la philosophie mathématique* consideran que la matemática griega pasó por una fase aritmética (es decir una fase donde la aritmética tenía la primacía) a una etapa geometrizable, y que ese tránsito se debió al descubrimiento de la teoría de los irracionales. Para poder trabajar con magnitudes irracionales, los geómetras griegos habrían “importado” de la Dialéctica eleática la regla de reducción al absurdo. No debemos olvidar sin embargo, que los griegos nunca llegaron a desarrollar una teoría abstracta del número. Número para ellos era siempre número de algo, de una longitud, una superficie o un volumen. Es cierto que Platón nos habla de números y figuras como entes pertenientes al mundo inteligible, pero no olvidemos que Aristóteles consideró a la Geometría como ocupándose de una materia inteligible

Para concluir, nos referiremos brevemente a la cuestión de la cientificidad de las pruebas por *reductio* dentro de la tradición aristotélica. Es decir, si entendemos aquí por “ciencia” concepción aristotélica de la ciencia, nos interesa saber cuál es el grado de cientificidad de las pruebas por *reductio*. Este es un problema que interesó a muchos matemáticos y filósofos en los siglos XVI y XVII

y es parte de la llamada *Quaestio Certitudo Mathematicarum* renacentista.⁶ Según Aristóteles (*Segundos Analíticos* I,2) el silogismo científico debe partir de premisas que sean “ verdaderas, primeras, inmediatas, más conocidas que la conclusión, anteriores a ella, y causa de la conclusión” Ahora bien, la prueba por reducción al absurdo parte de premisas falsas, y si aceptamos la terminología de Aristoteles, parece ir más bien del efecto a la causa, que demostrar el efecto por la causa. Pues, el hecho de llegar a un absurdo (el efecto) indica la falsedad de la hipótesis (la causa). Claramente, como lo muestra los *Segundos Analíticos* I,26, Aristóteles era consciente de que las pruebas por el absurdo tienen un grado de científicidad menor que las pruebas directas. Sin embargo, no reconocemos en la Geometría griega, ninguna empresa sistemática de eliminar las pruebas indirectas substituyéndolas por pruebas directas. Por lo que sabemos, fue recién en la Edad Moderna, con Guldin en su obra *Centrobaryca*, que aparece por primera vez, el intento de eliminar las pruebas por el absurdo. Queda como un problema abierto explicar porqué, a pesar de las observaciones de Aristóteles sobre el grado de científicidad menor de las pruebas por el absurdo, no hubo de parte de los géometras griegos ninguna preocupación en eliminar sistemáticamente ese tipo de pruebas.

Bibliografía

- Aristóteles (1979), *Les Seconds Analytiques*, Paris: Vrin.
 Aristóteles (1983), *Les Premiers Analytiques*, Paris: Vrin.
 Brunschvicg, L (1993), *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris: Blanchard.
 Century, New York: Oxford University Press.
 Gentzen, G. *The collected papers of Gerhard Gentzen* . Com por M.Szabo. Amsterdam: North Holland.
 Heath, T. (1956), *Euclid. The Thirteen Books of The Elements*. New York: Dover.
 Heath, T. (1981), *A History of Greek Mathematics*, New York: Dover.
 Mancosu, P. (1996), *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth*
 Mancosu, P. (1998), *From Brouwer to Hilbert*. New York: Oxford University Press.
 Prawitz, D. (1965), *Natural Deduction*. Stockholm: Almqvist&Wiksell.
 Ryle, G. (1965) “Argumentos filosóficos”, en: Ayer, A. (ed), *El positivismo lógico*, México: Fondo de Cultura Económica, pp.331-348.

⁶ Mancosu 1996 cap 1

Szabó, A. (1977), *Les débuts des Mathématiques grecques*, Paris: Vrin.
Szabo, Michael E. (ed.) (1969), *The collected papers of Gerhard Gentzen*,
Amsterdam: North-Holland Pub. Co.