

Consistencia de la teoría cuántica: concordancia entre las condiciones de definición y medición

Luis Gerardo Pedraza Saavedra[†]

Resumen

En este trabajo se mostrará que en una teoría física las posibilidades de definición de ciertas cantidades deducidas del formalismo, deben estar de acuerdo con las posibilidades de medición o sistemas de datos de dichas cantidades. De no ser así, habría una disparidad entre las predicciones de la teoría y las posibilidades de probar tales predicciones. Es decir, debe haber una armonía entre definibilidad y medibilidad. Para evitar un problema filosófico ambas posibilidades deben concordar. Las limitaciones de nuestros conceptos deben concordar con las limitaciones de nuestras capacidades de medición. Las posibilidades semánticas de una teoría física deben coincidir con las posibilidades metodológicas de la misma. En particular, se ilustrará que la teoría cuántica es consistente o coherente pues en ella se da una relación entre su formalismo matemático y sus sistemas de datos o de mediciones de los fenómenos de interés. Es decir, se llegará a que la teoría cuántica es coherente pues en ella se da la relación entre sus conceptos, principios y/o leyes, y las mediciones experimentales de los fenómenos de estudio. En ella se da una relación entre teoría y mundo (dominio de investigación). Se dejará claro que, está, por un lado, el formalismo matemático de la teoría cuántica con su conmutador, que proporciona cierta desigualdad de incertidumbre. Por otro lado, hay análisis de medición con los microscopios de rayos gamma, que brindan otra desigualdad de incertidumbre. Las desigualdades de incertidumbre obtenidas por los dos métodos serán iguales. Si no, la teoría cuántica no sería coherente y debería descartarse. El tema de la coherencia o consistencia deberá ser un criterio de selección de una teoría física, en particular de la teoría cuántica. En teoría cuántica, aunque es posible definir y medir de manera independiente el momentum p y la posición q del electrón en cualquier dirección x, y o z , no será posible DEFINIR ni MEDIR las cantidades p y q simultánea y precisamente, en igual dirección. En la sección 1 se especificará lo que se entiende por consistencia o coherencia de una teoría física. En la sección 2 se dan las condiciones de definición de parte del formalismo de la teoría

.....

[†] Pontificia universidad javeriana. Doctor en física. Docente titular II. Facultad de ingenierías y ciencias. Facultad de humanidades y ciencias sociales. Grupos de investigación: Episteme: filosofía y ciencia y De humanitate. Para contactar al autor, por favor, escribir a lugepesa@hotmail.com.

cuántica sobre la posición y el momentum del electrón. En la sección 3 se fijan las condiciones de medición o de los sistemas de datos en la teoría cuántica sobre la posición y el momentum del electrón. La sección 4 incluirá las conclusiones de la presente investigación¹.

1. Consistencia o coherencia de una teoría física

En una teoría física las posibilidades de definición de ciertas cantidades deducidas del formalismo, deben estar de acuerdo con las posibilidades de medición o sistemas de datos de dichas cantidades. De no ser así, habría una disparidad entre las predicciones de la teoría y las posibilidades de probar tales predicciones. Es decir, debe haber una armonía entre definibilidad y medibilidad. Para evitar un problema filosófico ambas posibilidades deben concordar. Las limitaciones de nuestros conceptos deben concordar con las limitaciones de nuestras capacidades de medición, según dijeron Bohr, 1928, p. 90 y Kalckar, 1971, p. 127. Las posibilidades semánticas de una teoría física deben coincidir con las posibilidades metodológicas de la misma. Es cierto que magnitudes definidas como medibles no son lo mismo que predicciones, y también es cierto que la posibilidad de hacer una medición no es lo mismo que un dato medido. Para los propósitos de este trabajo se tomarán potencialmente como equivalentes. Ampliando y profundizando en qué consiste la coherencia o consistencia de una teoría física, podría entenderse en términos generales como la relación entre el formalismo matemático de una teoría y los sistemas de datos o de mediciones de los fenómenos de interés. En términos más precisos, esta relación debería ser de estricta concordancia, aunque en la práctica, los sistemas de datos se corresponden *aproximadamente* con las predicciones teóricas, debido a variados factores que perturban las mediciones, y que a medida que avanza la ciencia misma, la ingeniería, la tecnología y los sistemas de control de los equipos de medida utilizados, los factores mencionados disminuyen cada vez más. Por lo dicho anteriormente, es de enfatizar que aquí la coherencia de una teoría física no se refiere a la coherencia de una teoría lógica o matemática.

Es decir, la coherencia tiene que ver con la relación entre los conceptos, principios y/o leyes, y las mediciones experimentales de los fenómenos de estudio. De manera más precisa, la consistencia de una teoría física es una relación entre sistemas teóricos y sistemas de datos (mediciones), dentro del dominio de interés de investigación.

A manera de ilustración, en mecánica clásica, las tres leyes de Newton son el formalismo teórico. A partir de este, y con la ayuda de la ley de gravitación newtoniana se puede deducir que los cuerpos, sin importar su masa, caen con la misma aceleración en las cercanías de la Tierra u otro planeta. Ahora, por el lado del mundo, las mediciones hechas por Galileo, o por la tripulación de la misión espacial Apolo 15, los sistemas de datos se corresponden aproximadamente con las predicciones teóricas. Lo mismo sucede

.....
¹ Téngase presente que las traducciones al español de las referencias en inglés, alemán y portugués las ha hecho el autor, quien se hace responsable por cualquier error en ello.

con, por ejemplo, la órbita de Neptuno (el sistema de datos), primer planeta descubierto mediante cálculos matemáticos (el sistema teórico).

En la próxima sección, por el lado del formalismo de la teoría cuántica, se deducirá la desigualdad de Heisenberg, mejor conocida como la desigualdad de incertidumbre entre la posición y el momentum de una partícula. En la sección 3, por el lado de los sistemas de datos, se considerarán las mediciones idealizadas que se pueden conseguir para las mismas variables físicas con los microscopios de rayos gamma de Heisenberg, Weizsäcker y Hermann.

2. Condiciones de definición del formalismo de la teoría cuántica sobre la posición y el momentum de un electrón

2.1 Conmutador de la posición q y el momentum p del electrón

Para el electrón, por ejemplo, en teoría cuántica es válida la relación $pq - qp = -i\hbar I$ entre posición y momentum en igual dirección x , y o z , respectivamente. Dicha relación fue introducida como postulado por Born & Jordan (Born & Jordan, 1925). El presente autor aclara que $p = mv$ significa módulo del momentum (producto de masa por rapidez), q significa posición, I es el operador identidad, $i = \sqrt{-1}$ y \hbar es la constante reducida de Planck, es decir $\hbar = (h/2\pi)$, con valor de $1,054571818 \times 10^{-34}$ (Joule) (segundo). Además, p y q no conmutan (pq no es igual a qp), pues, a pesar de que la constante \hbar es muy pequeña, ella no es cero. La relación $pq - qp = -i\hbar I$ también se puede escribir como la expresión $[p, q] = -i\hbar I$, a la cual se le llama conmutador de p y q .

Las variables p y p conmutan (pp es igual a pp) como también conmutan q y q . Entonces, en teoría cuántica, aunque es posible definir por separado (conmutador de p con p , o conmutador de q con q) el momentum y la posición del electrón en cualquier dirección x , y o z , no es posible DEFINIR (conmutador de p y q) en igual dirección las cantidades p y q simultánea y precisamente.

2.2. Demostración de la desigualdad de Heisenberg

Por lo dicho antes, las posibilidades semánticas de una teoría física deben coincidir con las posibilidades metodológicas de la misma. Es así que, respecto a lo primero, la desigualdad de Heisenberg fija las posibilidades semánticas de la teoría cuántica para p y q . Para demostrar la desigualdad de Heisenberg a partir del formalismo de la teoría cuántica, se hará uso del conmutador de p y q , de la definición estadística de error medio de una variable física, de la definición estadística de incertidumbre de una cantidad física, de números complejos, de números complejos conjugados, del diagrama cartesiano de una función parabólica y por cálculo diferencial, del valor mínimo absoluto de dicha función.

Referenciando a Messiah (1962) como base del raciocinio y con las sutilezas de la prueba de la desigualdad de Heisenberg a cargo del presente autor, los pasos para lograrla son varios. Veamos:

- 1) Se comienza con la relación $pq - qp = -i\hbar I$, transformándola como $i(pq - qp) = i(-i\hbar I)$, de donde $i(pq - qp) = \hbar I$, es decir $i[q, p] = i(qp - pq) = -\hbar I$.
- 2) Se define $q_1 = q - \langle q \rangle$ como el error medio de q , donde $\langle q \rangle$ significa el valor medio de q .
- 3) Entonces, $q_1^2 = (q - \langle q \rangle)^2 = q^2 - 2q\langle q \rangle + \langle q \rangle^2$.
- 4) La incertidumbre de q es $\langle q_1^2 \rangle^{1/2} = (\langle q^2 - 2q\langle q \rangle + \langle q \rangle^2 \rangle)^{1/2} = (\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2)^{1/2} = \Delta q$.
- 5) La incertidumbre de p es $\langle p_1^2 \rangle^{1/2} = (\langle p^2 - 2p\langle p \rangle + \langle p \rangle^2 \rangle)^{1/2} = (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)^{1/2} = \Delta p$.
- 6) Se construye el complejo arbitrario $C = q_1 + ixp_1$, con x real.
- 7) El complejo conjugado de C es $C^+ = q_1 - ixp_1$.
- 8) Entonces, $C^+C = (q_1 - ixp_1)(q_1 + ixp_1) = q_1^2 + ixq_1p_1 - ixp_1q_1 + x^2p_1^2$.
- 9) El producto del complejo conjugado por el complejo cumple siempre que $C^+C \geq 0$.
- 10) Entonces, $\langle C^+C \rangle = \langle q_1^2 \rangle + x\langle i(q_1p_1 - p_1q_1) \rangle + x^2\langle p_1^2 \rangle \geq 0$.
- 11) De donde, $x^2\langle p_1^2 \rangle + x\langle i[q_1, p_1] \rangle + \langle q_1^2 \rangle \geq 0$.
- 12) Pero, $[q_1, p_1] = [(q - \langle q \rangle), (p - \langle p \rangle)] = (q - \langle q \rangle)(p - \langle p \rangle) - (p - \langle p \rangle)(q - \langle q \rangle) = qp - pq$, es decir que $[q_1, p_1] = [q, p]$.
- 13) O sea, $x^2\langle p_1^2 \rangle + x\langle i[q, p] \rangle + \langle q_1^2 \rangle \geq 0$. De donde, $x^2(\Delta p)^2 + x\langle i[q, p] \rangle + (\Delta q)^2 \geq 0$.
- 14) Toda función polinómica de la forma $y(x) = ax^2 + bx + c$, con a , b y c reales, representa una parábola (ver Figura 1). En este caso $a = (\Delta p)^2$, $b = \langle i[q, p] \rangle$ y $c = (\Delta q)^2$.
- 15) Por primera derivada nula de la función y con respecto a x , $(dy(x)/dx) = 2ax + b = 0$, se obtiene el valor $x_{critica} = (-b/2a)$, donde puede haber un mínimo absoluto o un máximo absoluto de la función. Como $a = (\Delta p)^2$ es mayor que cero, la parábola es abierta hacia arriba, por lo que al evaluarse $y(x)$ en $x_{critica}$, surgirá por lo tanto un mínimo absoluto en el vértice de la parábola.
- 16) Entonces, $x_{critica} = -(\langle i[q, p] \rangle / 2(\Delta p)^2)$.
- 17) La segunda derivada de la función y con respecto a x es positiva, $(d^2 y(x)/dx^2) = 2a = 2(\Delta p)^2 > 0$, lo que indica que en $x_{critica}$ hay un mínimo absoluto de la función, como refuerzo a lo que ya se había afirmado.
- 18) Entonces, sustituyendo el valor de $x_{critica}$ en ese valor hay un *mínimo absoluto* de la función parabólica igual a $y(x_{critica}) = c - (b^2/4a)$, en el vértice de la parábola.
- 19) Del numeral trece $y(x_{critica}) \geq 0$, $c - (b^2/4a) \geq 0$, $ca \geq (b^2/4)$, $(\Delta q)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\langle i[q, p] \rangle^2}{4}$.
- 20) Finalmente se obtiene en valor absoluto que $(\Delta q)(\Delta p) \geq \frac{\langle i[q, p] \rangle}{2} \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$,

de donde, la desigualdad de Heisenberg finalmente está dada por $(\Delta q)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$. La desigualdad anterior implica que, en teoría cuántica, aunque es

posible medir de manera independiente el momentum y la posición del electrón en cualquier dirección x , y o z (límites individuales de incertidumbre de

p o q), no es posible MEDIR en igual dirección las cantidades p y q simultánea y precisamente (producto de los límites de incertidumbre). Es decir, si $\Delta q \rightarrow 0$, entonces $\Delta p \rightarrow \infty$, si $\Delta p \rightarrow 0$, por lo tanto $\Delta q \rightarrow \infty$, respectivamente. Es claro que la desigualdad de Heisenberg es parte del formalismo de la teoría cuántica, pues fue deducida de algunos de sus principios.

La desigualdad estadística de Heisenberg juega el papel de principio epistemológico, pues limita qué podemos conocer estadísticamente acerca del electrón. También es un principio ontológico, pues asegura de forma estadística qué es físicamente real (Hilgevoord & Uffink, 2016).

21)

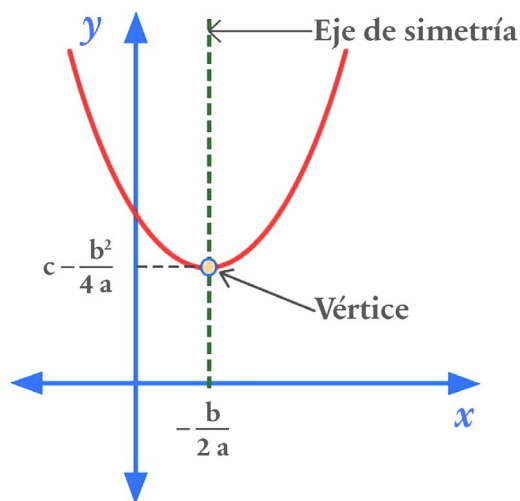


Figura 1. Parábola abierta hacia arriba, sin cortes con el eje horizontal, con corte con el eje vertical y valor mínimo absoluto en el vértice. Fuente: <https://www.portaleducativo.net/tercero-medio/10/funcion-cuadratica-parabola>

3. Condiciones de medición en la teoría cuántica sobre la posición y el momentum de un electrón

Como se dijo antes, en una teoría física las posibilidades de definición de ciertas cantidades deducidas del formalismo, deben estar de acuerdo con las posibilidades de medición o sistemas de datos de dichas cantidades. En cuanto a lo segundo, en teoría cuántica para obtener a partir de mediciones de la posición q del electrón, con su respectiva incertidumbre Δq , una desigualdad del orden de magnitud de la desigualdad de Heisenberg, la cual se logró del formalismo de la teoría cuántica, se hará uso de un microscopio idealizado, llamado microscopio mental de rayos gamma de Heisenberg.

Para ello se aclarará por qué es necesario usar del espectro electromagnético los rayos gamma de luz en la localización del electrón, teniendo en cuenta que dicho electrón es muy pequeño.

En lo que sigue el símbolo “ \approx ” significa aproximadamente igual, y el símbolo “ $<$ ” significa menor que. Tanto los átomos como las demás partículas descritas en la Figura 2 se suponen aproximadamente iguales a pequeñísimas esferas, cuyos diámetros tienen los tamaños referenciados en dicha figura:

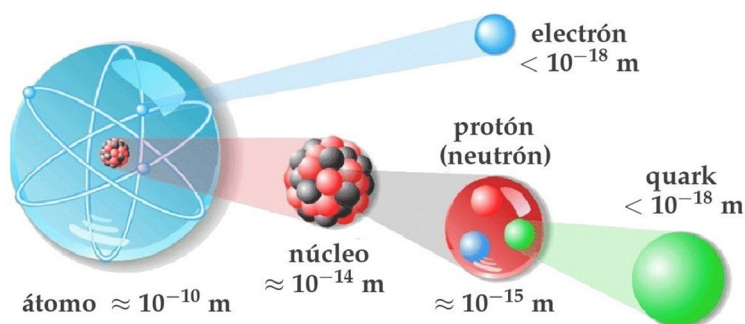


Figura 2. Tamaños aproximados del átomo, el núcleo, el protón, el neutrón, el electrón y el quark. Fuente: <https://educavictorproficiencia.blogspot.com/2018/02/un-nuevo-modelo-atómico-quarks-y.html>

En la Figura 3 se entiende que $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$ y $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$. Entonces, como el tamaño aproximado del electrón es de 10^{-18} m o menor, la longitud de onda adecuada para localizarlo corresponde a la radiación gamma.

3.1. Microscopio mental clásico-cuántico de Heisenberg

A continuación, siguen los raciocinios de Richmond (2016) referentes al microscopio mental de rayos gamma de Heisenberg de 1930 (Heisenberg, 1930).

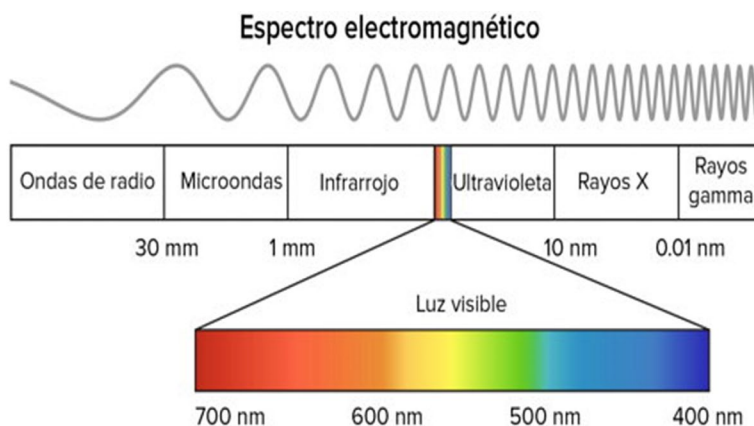


Figura 3. Espectro electromagnético de la luz y sus longitudes de onda.

Fuente: <https://www.fotonostra.com/glosario/longitudonda.htm>

Vale aclarar que Heisenberg en 1930 dio una representación gráfica del microscopio muy parecida a la Figura 4.

También, asúmase que el ángulo θ es igual al ángulo α y que el eje x es equivalente al eje q . Se construye un microscopio con un lente circular de diámetro D y longitud focal f . El electrón está localizado en el foco del microscopio si la luz (rayo gamma) que lo ilumina rebota en él hacia el lente. Cuando vemos el fotón de luz a través del lente, sabemos la “posición del electrón”. Pero la colisión del fotón con el electrón le da momentum a este último ¿Qué cantidad?

Consideremos inicialmente quieto al electrón (ver Figura 5), solamente la dirección q y el rebote del fotón hacia arriba y a la derecha (ver el sistema cartesiano de coordenadas):

Antes	Después
$p_{inicial} = (h/\lambda) + m_e(0)$	$p_{final} = p_{1x} + p_e$
$p_{inicial} = (h/\lambda) + 0$	$p_{final} = (h/\lambda_1)sen\alpha + (m_e v_{e1})$

Este es el mínimo posible momentum positivo en la dirección q para el electrón luego de la colisión. Para el fotón gamma se ha usado la relación $p = (h/\lambda)$ de Einstein-de Broglie que surgió de experimentos y que no forma parte de los principios teóricos de los cuales se dedujo la desigualdad de Heisenberg.

El máximo momentum negativo del electrón después del choque en la dirección $(-q)$ ocurre en el rebote del fotón hacia arriba y a la izquierda. En ambos casos se conserva el momentum antes y después del choque, o sea $p_{inicial} = p_{final}$:

Antes	Después
$p_{inicial} = (h/\lambda) + m_e(0)$	$p_{final} = -p_{2x} + p_e$
$p_{inicial} = (h/\lambda) + 0$	$p_{final} = (-h/\lambda_2)sen\alpha + (m_e v_{e2})$

La conservación del momentum antes y después del choque, o sea $p_{inicial} = p_{final}$, surge porque el fotón gamma y el electrón forman un sistema cerrado, sobre el cual no hay fuerza externa neta, es decir, $d(\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e)/dt = 0$, por lo que $(\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = (c\vec{t} e.)$, es decir, es una constante vectorial.

Esta propiedad de conservación del momentum del sistema no formó parte de los principios teóricos de los cuales se dedujo la desigualdad de Heisenberg. No se sabe exactamente cuánto momentum tiene el electrón después de la colisión.

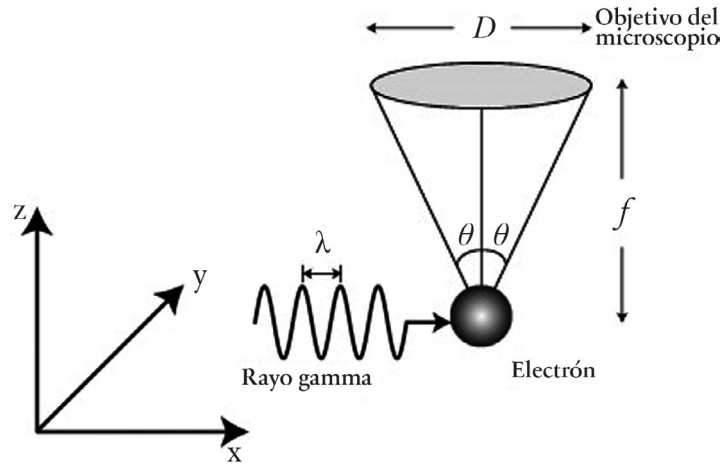


Figura 4. Rayo gamma que ilumina al electrón y luego entra al microscopio.
Fuente: Kapale (2013).

Dicho momentum podría estar entre:

$$m_e v_{e1} = (h/\lambda) - (h/\lambda_1) \text{sen} \alpha \text{ y}$$

$$m_e v_{e2} = (h/\lambda) + (h/\lambda_2) \text{sen} \alpha.$$

Entonces, $\Delta p = (m_e v_{e2}) - (m_e v_{e1}) = (h/\lambda_2) \text{sen} \alpha + (h/\lambda_1) \text{sen} \alpha$. El rango del posible momentum del electrón está entre $(-h/\lambda_1) \text{sen} \alpha$ y $(h/\lambda_2) \text{sen} \alpha$.

Así, aunque el microscopio de Heisenberg se usa para localizar al electrón, también el microscopio permite determinar la incertidumbre del momentum del electrón por medio de la incertidumbre del momentum del fotón gamma. En la Figura 5 el detector es equivalente al objetivo del microscopio de la Figura 4.

Para simplificar la matemática y los efectos físicos, considere el ángulo $\theta = \alpha$ muy pequeño, tal que se produzca el más pequeño cambio en el momentum con $\text{sen} \alpha \cong \alpha$ y $\lambda \cong \lambda_1 \cong \lambda_2$. El rango del posible momentum del electrón entonces está entre $(-h/\lambda) \alpha$ y $(h/\lambda) \alpha$. Un fotón con longitud de onda λ muy pequeña tiene mucha energía y mucho momentum, por lo tanto, golpeará al electrón fuertemente. Luego, para minimizar la incertidumbre en el momentum del electrón se debe usar luz de longitud de onda λ muy grande. Pero ¿qué le sucederá a la medición de la posición del electrón? De acuerdo con la óptica clásica (Matveev, 1988), el límite de resolución D_R de un microscopio es la distancia mínima a partir de la cual ya no es posible distinguir la separación entre dos puntos.

Dicho límite depende de la longitud de onda λ empleada, del índice de refracción n del medio por el que pasa la luz entre el electrón y el lente, del índice de refracción n' del medio por el que pasa la luz entre el lente y el ojo humano y del ángulo $\theta = \alpha$ de desviación de la luz hacia el lente luego de golpear al electrón. En el caso presente la fórmula es:

$$D_R = D = ((0,61)\lambda n') / (n \text{sen} \alpha) \cong (\lambda/\alpha),$$

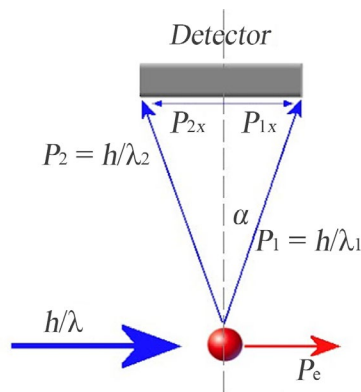


Figura 5. Balances de momentum mínimo y máximo en el choque entre el fotón gamma y el electrón. Fuente: <http://bandaprohibida.blogspot.com/2007/03/heisenberg-y-los-rayos-gamma.html>

pues $n = n' = 1$ para el aire y $\text{sen} \alpha \cong \alpha$. Es decir $\alpha \cong (\lambda/D_R)$. Para disminuir D_R y localizar mejor al electrón, debe usarse entonces λ muy pequeña (radiación gamma) y $\theta = \alpha$ muy grande (acercar el lente lo que más se pueda al electrón, sin perder el foco). El lente del microscopio tiene diámetro D y longitud focal f , por lo que el microscopio no puede localizar al electrón en la dirección q más precisamente que desde $(-f \tan \alpha)$ a $(f \tan \alpha)$. Pero como $\theta = \alpha$ es muy pequeño, también se cumple que $\tan \alpha \cong \alpha$. Entonces la localización del electrón está entre $(-f\alpha)$ y $(f\alpha)$, o sea, entre $(-f(\lambda/D_R))$ y $(f(\lambda/D_R))$. De la Figura 4 se puede obtener la relación $\tan \alpha = ((D/2)/f) \cong \alpha$, tal que $(f/D) \cong (1/(2\alpha))$. La incertidumbre Δq en la posición del electrón está entonces entre $(-\lambda/(2\alpha))$ y $(\lambda/(2\alpha))$. La incertidumbre Δp en el momentum del electrón está entre $(-h\alpha/\lambda)$ y $(h\alpha/\lambda)$. Así, la luz de longitud de onda larga causa gran incertidumbre en la posición del electrón y pequeña incertidumbre en el momentum del mismo. Finalmente, $(\Delta q)_{total} \cong (\lambda/\alpha)$ y $(\Delta p)_{total} \cong (2h\alpha/\lambda)$, obteniéndose el siguiente producto:

$$(\Delta q)_{total} (\Delta p)_{total} \cong 2h > h > (\hbar/2).$$

Es decir, respetando los órdenes de magnitud de medición dados por la desigualdad de Heisenberg se obtiene para el electrón que:

$$(\Delta q)_{total} (\Delta p)_{total} > (\hbar/2).$$

Para hacer una reflexión sobre la diferencia entre experimentos reales y experimentos mentales, en cuanto al sistema de datos de cada caso, valen las palabras de Hartz (2013):

Un experimento mental (del alemán *gedankenexperiment*) es una situación experimental hipotética en la que las únicas limitaciones impuestas a su realización son las limitaciones intrínsecas sobre las cantidades físicas utilizadas en la medición. En otras

palabras, el montaje experimental está diseñado de forma teórica, sin tener en cuenta las limitaciones derivadas de problemas técnicos existentes en configuraciones experimentales reales. En el caso particular de la teoría cuántica, los experimentos mentales se utilizan para analizar las limitaciones existentes en la medición de cantidades físicas, como el momentum y la posición. (p. 15)

Nótese que en la sección 2.2 el producto de las desigualdades de incertidumbre se asocia a una dispersión estadística de los resultados obtenidos cuando se miden la posición y el momentum de una partícula que pertenece a una colectividad estadística conformada por muchísimas como ella. Pero en la presente sección, en el microscopio de Heisenberg, se consideró que su desigualdad es válida para una muestra individual, es decir, para una partícula sola. El formalismo de la teoría cuántica y sus verificaciones experimentales se basan en la interpretación estadística. Las mediciones cuánticas nunca se refieren literalmente a una partícula aislada sino a una colectividad estadística de muchas como ella. Parecería entonces que el microscopio mental de rayos gamma de Heisenberg en su forma original como una ilustración de la desigualdad de incertidumbre no podría considerarse implicado por el formalismo de la teoría cuántica. Debería especificarse un mecanismo para la preparación de una colectividad estadística de electrones y fotones monocromáticos en un estado cuántico particular. Luego, se estimarían las incertidumbres en los resultados de medición de las variables canónicamente conjugadas q y p para los electrones de tal colectividad estadística, los cuales han chocado uno a uno con otra colectividad estadística de fotones, y del producto de ellas se verificaría su consistencia con lo implicado por la derivación matemática.

Dicho mecanismo se ha realizado por Hom (Hom, 1983) con la conclusión de que el producto de las incertidumbres en los resultados de medición de las variables canónicamente conjugadas q y p para los electrones de dicha colectividad estadística es compatible con la derivación matemática. El autor de este trabajo recomienda al lector ir a la referencia original para el desarrollo detallado del mecanismo en mención, el cual por razones de espacio no se incluye aquí.

3.2. Microscopios mentales cuánticos de Weizsäcker y Hermann

En 1931 Weizsäcker publicó el artículo titulado “Localización de un electrón a través de un microscopio”; el cual comienza con el siguiente resumen:

A continuación, se tratará un experimento de pensamiento especial para determinar la ubicación de un electrón, a saber, la imagen de un electrón iluminado con luz de longitud de onda suficientemente corta a través de un microscopio. La primera parte del trabajo contiene una breve descripción del experimento. Esto da lugar a dificultades que hacen deseable un cálculo estricto del problema. Lo anterior se hace en la segunda parte utilizando la formulación de la electrodinámica cuántica de Heisenberg-Pauli. En la tercera parte los resultados del cálculo son claramente discutidos. (p. 114)

3.2.1. Fotón gamma en el plano de imagen y la localización del electrón

El trabajo de Filk (2016) nos permite seguir a Weizsäcker (1931) en sus planteamientos más relevantes. Se aclara que Weizsäcker en 1931 dio una representación gráfica unificada del microscopio, muy parecida a las Figuras 6 y 7, que por claridad de la exposición se ha dividido en dos. Según Filk la Figura 6 representa para Weizsäcker el microscopio mental de Heisenberg (1930). Un electrón e se podría mover libremente por el plano L . El electrón sería golpeado por un solo fotón gamma al cual se le conocería el vector de onda $\vec{k} = \hbar(2\pi/\lambda)\hat{k} = (h/\lambda)\hat{k}$ asociado a la onda plana con longitud de onda λ que lo representa antes de la colisión con el electrón. Para el fotón gamma se ha usado la relación $k = (h/\lambda)$ de Einstein-de Broglie que surgió de experimentos y que no forma parte de los principios teóricos de los cuales se dedujo la desigualdad de Heisenberg.

Asumimos que el fotón sería dispersado por el electrón y el estado cuántico del fotón estaría descrito por una función de onda esférica que emanaría desde la localización del electrón al momento de la dispersión. Los elaborados cálculos de Weizsäcker con base en el formalismo teórico cuántico del electromagnetismo en la versión de Heisenberg-Pauli mostraron que esencialmente se puede usar la óptica ondulatoria clásica para deducir la nombrada función de onda del fotón gamma que se propagaría por el lente óptico de la misma manera que una onda electromagnética clásica esférica. El físico y filósofo Weizsäcker discutió las limitaciones de tal aproximación, pero los resultados esenciales permanecerían sin alteración. En particular, dicha onda se enfocaría en una pequeña región del *plano de imagen* detrás del lente. Si se colocase una placa fotográfica S en ese plano, se registraría entonces al fotón en el punto P . La ubicación de P , así sea producida por solo un fotón gamma, permitiría deducir la localización del centro de la función de onda esférica y, por lo tanto, se podría deducir la localización del electrón al momento de la dispersión.

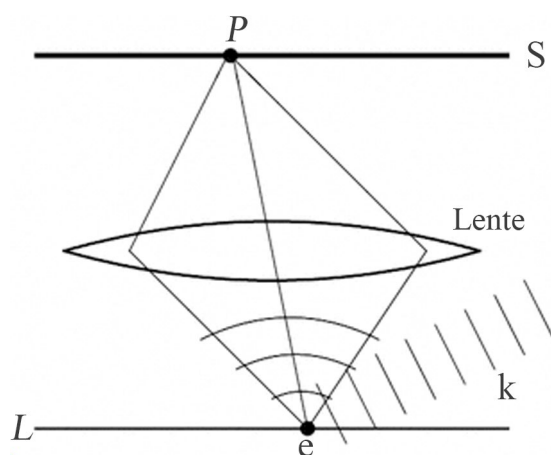


Figura 6. Fotón gamma que golpea al electrón, entra al microscopio y se detecta en el plano de imagen. Fuente: Filk (2016).

3.2.2. Fotón gamma en el plano focal y la dirección de propagación del electrón

Siguiendo a Filk (2016), sobre Weizsäcker (1931), también se podría colocar la placa fotográfica en el *plano focal* del lente óptico (Figura 7) y de la localización del punto P' en ese plano donde los fotones gamma han golpeado, podría obtenerse información sobre la dirección de la cual provendrían los fotones que entran al lente. El fotón sería dispersado por el electrón como una onda plana con longitud de onda λ' y con vector de onda $\vec{p} = (h/\lambda')\hat{p}$. Esto implicaría que no hay un centro particular de dispersión, que el estado del electrón estaría distribuido “sobre todo” el plano L y el electrón sería descrito por un vector propio, sin localización, de su operador momentum. La Figura 7 representa lo anterior con varios supuestos electrones “virtuales” a lo largo del plano L .

La información acerca del centro de dispersión del fotón y el electrón se habría perdido, pero se conocería la diferencia entre el vector de onda inicial $\vec{k} = (h/\lambda)\hat{k}$ y el vector de onda final $\vec{p} = (h/\lambda')\hat{p}$ de la onda plana dispersada, y con ello se conocería la transferencia de momentum del fotón al electrón. Si se conociera el momentum inicial del electrón, se podría inferir de P' el momentum del mismo justo después de la dispersión. Aunque el microscopio de Weizsäcker se usa para localizar al electrón, también el microscopio permite determinar el valor y la incertidumbre del momentum del electrón por medio del valor y la incertidumbre del momentum del fotón gamma.

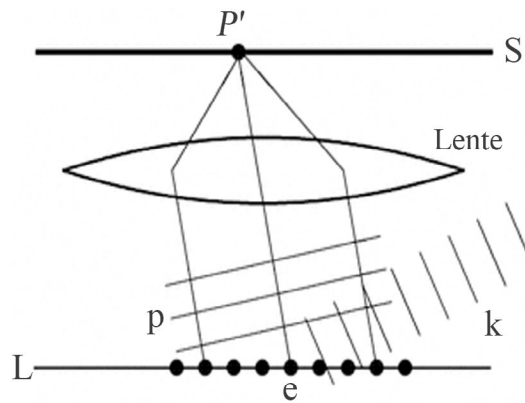


Figura 7. Fotón gamma que golpea al electrón, entra al microscopio y se detecta en el plano focal. Fuente: Filk (2016).

Usando terminología moderna, después de la dispersión tanto el electrón como el fotón estarían descritos por un estado cuántico entrelazado. Se puede expresar dicho estado entrelazado en dos bases matemáticas diferentes:

- 1) Una base de posiciones donde el electrón al instante de la dispersión está localizado en un punto q y el fotón dispersado se propaga lejos de ese centro q en forma de onda esférica.
- 2) Una base de momentum para el electrón y para el fotón, este último siendo descrito luego de la dispersión por una onda plana con vector de onda fijo.

Recordando que el momentum lineal es una constante c vectorial antes y luego del choque:

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e = \vec{c},$$

entonces:

$$\begin{aligned} \Delta(\vec{p}_\gamma + \vec{p}_e) &= \Delta\vec{p}_\gamma + \Delta\vec{p}_e = \vec{0}, \\ \Delta\vec{p}_\gamma &= -\Delta\vec{p}_e = \vec{p} - \vec{k} = -(\vec{k} - \vec{p}). \end{aligned}$$

Esta propiedad de conservación del momentum del sistema compuesto por el fotón gamma y el electrón no formó parte de los principios teóricos de los cuales se dedujo la desigualdad de Heisenberg. Formalmente, esto significa que el estado final $|\psi_f\rangle$ del sistema total (electrón y fotón) después de que la dispersión ha tenido lugar y antes de que el fotón sea absorbido por la placa fotográfica, la cual es parte del instrumento de medición (el microscopio), ya sea en el plano de imagen o en el plano focal, se describe por la expresión:

$$|\psi_f\rangle \equiv \int a(q)(|q\rangle_e)(|o. e. (q)\rangle_\gamma) dq \equiv \int b(p)(|p\rangle_e)(|p-k\rangle_\gamma) dp,$$

donde $a(q)$ y $b(p)$ son coeficientes de expansión en unidades adecuadas de medición, $|q\rangle_e$ es el vector de estado del electrón en la base de posiciones, $|o. e. (q)\rangle_\gamma$ es el vector de estado del fotón gamma en la onda esférica con la base de posiciones, $|p\rangle_e$ es el vector de estado del electrón en la base de momentum y $|p-k\rangle_\gamma$ es el vector de estado del fotón gamma en la onda plana con la base de momentum. Las integrales en q y p se pueden extender sobre todos los posibles valores que estas cantidades pueden asumir de acuerdo con la restricción de que el electrón pertenezca al plano L . El estado cuántico final del sistema total (electrón y fotón) después de que la dispersión ha tenido lugar y antes de que el fotón sea absorbido por la placa fotográfica, ha sido expresado utilizando el principio de superposición, principio que no formó parte de los principios teóricos de los cuales se dedujo la desigualdad de Heisenberg. El mismo estado cuántico final está descrito en dos bases diferentes. Si las mediciones sobre el fotón gamma se hacen en el *plano de imagen* entonces se determinará el centro q de la onda esférica y, por tanto, por causa del entrelazamiento cuántico entre el electrón y el fotón, se determinará indirectamente la posición del electrón justo en la dispersión.

Si se hacen sobre el *plano focal*, se medirá el momentum \vec{p} del fotón dispersado y, por tanto, también por el mencionado entrelazamiento, se determinará indirectamente el momentum del electrón justo en la dispersión. Parecería que entonces tanto la posición como el momentum del electrón podrían determinarse con precisión infinita a la vez, en pleno desacuerdo con la desigualdad de Heisenberg, pero como las mediciones no se pueden realizar a la vez en ambas bases matemáticas debido a la relación de conmutación

$pq - qp = -i\hbar I$, es decir, como las mediciones no se pueden realizar a la vez en ambos planos sin destruir el entrelazamiento, la restricción $(\Delta q)(\Delta p) \geq (\hbar/2)$ en la medición simultánea de p y q del electrón, impuesta por la desigualdad de Heisenberg, se mantiene.

El microscopio mental de rayos gamma de Weizsäcker (1931) muestra que las posibilidades físicas de medición de la posición y el momentum del electrón concuerdan con las posibilidades físicas de definición de dichas cantidades dadas por la desigualdad de Heisenberg.

El trabajo de Filk (2016) nos permite seguir también a Hermann (1935) en sus planteamientos más relevantes. Cabe destacar que, con su formación doctoral en matemáticas, física y filosofía, Hermann participó activamente entre 1934 y 1935 en el coloquio de física organizado por Heisenberg en la ciudad de Leipzig (Alemania).

Al final de ese período, publicó el artículo titulado “Fundamentos filosófico-naturales de la mecánica cuántica”, en cuya décima sección analizó el microscopio mental de Weizsäcker (Weizsäcker, 1931). A las dos situaciones de medición descritas en la sección anterior, Hermann adicionó la siguiente, sin dar una representación gráfica del microscopio:

Finalmente, si no se coloca placa fotográfica alguna y se le permite al fotón gamma seguir su camino sin detectársele, se obtendría una tercera descripción —aunque no de la misma manera intuitiva— del estado luego de la colisión. En este caso, al sistema físico compuesto por el fotón de luz y el electrón se le asocia una función de onda que describe una combinación lineal: cada uno de sus términos es el producto de una función de onda que describe al electrón y otra función de onda que describe al fotón. Por medio de esta combinación lineal el fotón y el electrón no están así descritos cada uno por sí mismo, sino por la relación entre ellos. Cada estado del uno es asociado con el estado del otro. (p. 258)

La anterior es una descripción absolutamente clara y precisa de lo que luego Schrödinger (1935) llamó “entrelazamiento cuántico”. Desde la perspectiva moderna el estado total entrelazado del electrón y el fotón inmediatamente después de la colisión es independiente del contexto observacional (aparataje experimental de medición), pero puede ser expandido en diferentes bases matemáticas, como ya se mencionó. El electrón solo no tiene un estado definido inmediatamente después de la colisión, sino “estados relativos” con respecto a la base matemática que se escoja para la descripción del fotón, quien en este caso forma parte del instrumento de medición. Dicho estado se escoge convenientemente con referencia al tipo de medición que se pretende realizar, es decir, al “contexto observacional”, y por lo tanto los “estados relativos” del electrón también dependen de dicho contexto observacional; es decir, de si se medirá el fotón gamma en el *plano de imagen* o en el *plano focal*.

Durante la interacción entre el electrón y el fotón, la información completa acerca del estado del electrón es transferida al estado del fotón. El fotón lleva la información total tanto de la localización del electrón como de su momentum. La decisión del

experimentador de colocar la placa fotográfica en el *plano de imagen* o en el *plano focal* le permite extraer la información de la posición del electrón o de su momentum.

3.3. La teoría cuántica es coherente en el tratamiento de la posición y el momentum de un electrón

Las condiciones de definición del formalismo de la teoría cuántica sobre la posición y el momentum de un electrón fueron establecidas en la sección 2. Las condiciones de medición en la teoría cuántica sobre la posición y el momentum de un electrón fueron establecidas en la sección 3. Fue probado entonces que las posibilidades semánticas de la teoría cuántica concuerdan con las posibilidades metodológicas de la misma en cuanto al tratamiento de la posición y el momentum del electrón se refiere. Siguiendo las palabras de Hartz (2013, p. 29), está, por un lado, el formalismo matemático de la teoría cuántica con su conmutador, que proporciona cierta desigualdad de incertidumbre. Por otro lado, hay análisis de medición con los microscopios de rayos gamma, que brindan otra desigualdad de incertidumbre. Las desigualdades de incertidumbre obtenidas por los dos métodos son iguales. Si no, la teoría cuántica no sería coherente y debería descartarse. Es decir, el tema de la coherencia o consistencia es un criterio de selección de la teoría cuántica. Lo anterior puede representarse en el siguiente diagrama:

$$[q, p] = (qp - pq) = i\hbar I \Rightarrow (\Delta q)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$$

‡ (comparación)

$$(\text{medición con los microscopios de rayos gamma}) \Rightarrow (\Delta q)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$$

4. Conclusiones

1) En teoría cuántica, aunque es posible definir (conmutador de p con p , o conmutador de q con q) y medir de manera independiente el momentum y la posición del electrón en cualquier dirección (límites individuales de incertidumbre en la medición de p o q con los microscopios de rayos gamma), no es posible DEFINIR (conmutador de p y q) ni MEDIR en igual dirección las cantidades p y q simultánea y precisamente (producto de los límites de incertidumbre en la medición con los microscopios de rayos gamma).

2) El tema de la coherencia o consistencia es un criterio de selección de una teoría física, en particular de la teoría cuántica. Si la teoría cuántica no fuera coherente, debería ser descartada, no sería aceptable, pues en ella habría una disparidad entre sus predicciones y las posibilidades de probar tales predicciones.

3) En una teoría física las posibilidades de definición de ciertas cantidades deducidas del formalismo, deben estar de acuerdo con las posibilidades de medición o sistemas de datos de dichas cantidades. Como ya se dijo, de no ser así, habría una disparidad entre las pre-

dicciones de la teoría y las posibilidades de probar tales predicciones. Es decir, debe haber una armonía entre definibilidad y medibilidad. Para evitar un problema filosófico ambas posibilidades deben concordar.

En el caso de la teoría cuántica, las limitaciones de nuestros conceptos (la desigualdad de Heisenberg) deben concordar con las limitaciones de nuestras capacidades de medición (microscopios de rayos gamma), según dijeron Bohr, 1928, p. 90 y Kalckar, 1971, p. 127. Las posibilidades semánticas de una teoría física deben coincidir con las posibilidades metodológicas de la misma.

4) La teoría cuántica es consistente o coherente pues en ella se da una relación entre su formalismo matemático y sus sistemas de datos o de mediciones de los fenómenos de interés. Es decir, la teoría cuántica es coherente pues en ella se da la relación entre sus conceptos, principios y/o leyes, y las mediciones experimentales de los fenómenos de estudio. De manera más precisa, la consistencia de la teoría cuántica es una relación entre sus sistemas teóricos y sus sistemas de datos (mediciones), dentro del dominio de interés de investigación.

5) Nótese que en la sección 2.2 el producto de las desigualdades de incertidumbre se asocia a una dispersión estadística de los resultados obtenidos cuando se miden la posición y el momentum de una partícula que pertenece a una colectividad estadística conformada por muchísimas como ella. Pero en la presente sección se consideró que la desigualdad de Heisenberg es válida para una muestra individual, es decir, para una partícula sola.

El formalismo de la teoría cuántica y sus verificaciones experimentales se basan en la interpretación estadística. Las mediciones cuánticas nunca se refieren literalmente a una partícula aislada sino a una colectividad estadística de muchas como ella. Parecería entonces que el microscopio mental de rayos gamma de Heisenberg en su forma original como una ilustración de la desigualdad de incertidumbre no podría considerarse implicado por el formalismo de la teoría cuántica.

Debería especificarse un mecanismo para la preparación de una colectividad estadística de electrones y fotones monocromáticos en un estado cuántico particular. Luego, se estimarían las incertidumbres en los resultados de medición de las variables canónicamente conjugadas q y p para los electrones de tal colectividad estadística, los cuales han chocado uno a uno con otra colectividad estadística de fotones, y del producto de ellas se verificaría su consistencia con lo implicado por la derivación matemática.

Dicho mecanismo se ha realizado por Hom (Hom, 1983) con la conclusión de que el producto de las incertidumbres en los resultados de medición de las variables canónicamente conjugadas q y p para los electrones de dicha colectividad estadística es compatible con la derivación matemática.

El autor de este trabajo recomienda al lector ir a la referencia original para el desarrollo detallado del mecanismo en mención, el cual por razones de espacio no se incluye aquí.

6) En la sección 2 fueron establecidas las condiciones de definición del formalismo de la teoría cuántica sobre la posición y el momentum de un electrón. Similarmente, las condiciones de medición en la teoría cuántica sobre la posición y el momentum de un electrón fueron establecidas en la sección 3. Se verificó entonces que las posibilidades semánticas de la teoría cuántica concuerdan con las posibilidades metodológicas de la misma en cuanto al tratamiento de la posición y el momentum del electrón se refiere. En palabras de Hartz (p. 29, 2013), está, por un lado, el formalismo matemático de la teoría cuántica con su conmutador, que proporciona cierta desigualdad de incertidumbre. Por otro lado, hay análisis de medición con los microscopios de rayos gamma, que brindan otra desigualdad de incertidumbre. Las desigualdades de incertidumbre obtenidas por los dos métodos son iguales. Lo anterior puede representarse en el siguiente diagrama:

$$[q, p] = (qp - pq) = i\hbar I \Rightarrow (\Delta q)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$$

‡ (comparación)

$$(\text{medición con los microscopios de rayos gamma}) \Rightarrow (\Delta q)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}$$

Si no hubieran concordado ambas desigualdades de incertidumbre, la teoría cuántica no habría sido coherente y debería haber sido descartada. Es decir, el tema de la coherencia o consistencia es un criterio de selección de la teoría cuántica.

Agradecimientos

El autor da las gracias al profesor Dr. Germán Guerrero Pino, director del grupo de investigación Episteme: filosofía y ciencia, departamento de filosofía de la Universidad del Valle, Colombia, por las múltiples sugerencias y comentarios de estilo y contenido al presente trabajo.

Bibliografía

- Bohr, N. (1928). The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory. In J. Wheeler & W. Zurek (Eds.), *Quantum Theory and Measurement* [1983] (pp. 87-126). Princeton University Press.
- Born, M., & Jordan, P. (1925). Zur Quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 34, 858-888. <https://doi.org/10.1007/BF01328531>
- Filk, T. (2016). Carl Friedrich von Weizsäcker's "Ortsbestimmung eines Elektrons" and its Influence on Grete Hermann. In E. Crull & G. Bacciagaluppi (Eds.), *Grete Hermann-Between Physics and Philosophy* (Chapter 5) (pp. 71-83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-024-0970-3_5
- Hartz, T. (2013). *As Heterodoxias Quânticas e o Olhar do Historiador: Uma História dos Usos dos Argumentos de Niels Bohr Acerca da Medição de Campos Quânticos (1930-1970)* [Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana]. https://ppgefhc.ufba.br/sites/ppgefhc.ufba.br/files/hartz_-_tese_de_doutorado.pdf

- Heisenberg, W. (1930). *The Physical Principles of the Quantum Theory* [1949] (pp. 3-4, 11, 20-21). Dover Publications, Inc.
- Hermann, G. (1935). Natural-Philosophical Foundations of Quantum Mechanics. In E. Crull & G. Bacciagaluppi (Eds.), *Grete Hermann-Between Physics and Philosophy* [2016] (Chapter 15) (pp. 239-278). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-024-0970-3_15
- Hilgevoord, J., & Uffink, J. (2016). The Uncertainty Principle (Winter Edition) (E. N. Zalta, ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/qt-uncertainty/>
- Hom, D. (1983). *Investigations of some fundamental problems in non-relativistic quantum mechanics* [Doctoral thesis. Chapter two: Heisenberg's uncertainty principle and the gedanken experiments]. University of Calcutta. https://shodhganga.inflibnet.ac.in:8443/jspui/bitstream/10603/165645/7/07_chapter%202.pdf
- Kalckar, J. (1971). Measurability Problems in the Quantum Theory of Fields. In B. d'Espagnat (Ed.), *International School of Physics "Enrico Fermi"* (course IL) (pp. 127-169). Academic Press.
- Kapale, K. (2013). Subwavelength Atom Localization. *Progress in Optics*, 58, 199-250. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-62644-8.00004-2>
- Matveev, A. N. (1988). *Optics*. Mir Publishers.
- Messiah, A. (1962). *Quantum Mechanics* [2014]. Dover Publications, Inc.
- Richmond, M. (2016). Heisenberg's Microscope. <http://spiff.rit.edu/classes/phys314/lectures/heis/heis.html>
- Schrödinger, E. (1935). The Present Situation in Quantum Mechanics. In J. Wheeler & W. Zurek (Eds.), *Quantum Theory and Measurement* [1983] (pp. 152-167). Princeton University Press.
- Weizsäcker, C. (1931). Ortsbestimmung eines Elektrons durch ein Mikroskop. *Zeitschrift für Physik*, 70, 114-130. <https://doi.org/10.1007/BF01391035>